高雄市明誠中學 高一數學平時測驗					日期：93.04.15
範圍	2-2 三角函數基本關係+Ans	班級		姓名	
		座號			

一. 單選題(每題 10 分)

1. 設 $0° < \theta < 45°$，則化簡

$$\frac{\sqrt{(\tan\theta-\cot\theta)^2+4}-\sqrt{(\tan\theta+\cot\theta)^2-4}}{\sqrt{(\tan\theta-\cot\theta)^2+4}+\sqrt{(\tan\theta+\cot\theta)^2-4}}=$$

(A) $\tan^2\theta$ (B) $-\tan^2\theta$ (C) $\cot^2\theta$ (D) $-\cot^2\theta$ (E) $\sin\theta\cot\theta$

答案：(A)

解析：國中學過：$\sqrt{(a-b)^2}=|a-b|=\begin{cases}a-b,\cdots a\ge b\\ b-a,\cdots a<b\end{cases}$

原式$=\dfrac{\sqrt{(\tan\theta+\cot\theta)^2}-\sqrt{(\tan\theta-\cot\theta)^2}}{\sqrt{(\tan\theta+\cot\theta)^2}+\sqrt{(\tan\theta-\cot\theta)^2}}=\dfrac{|\tan\theta+\cot\theta|-|\tan\theta-\cot\theta|}{|\tan\theta+\cot\theta|+|\tan\theta-\cot\theta|}$

但 $0° < \theta < 45°$ $\therefore$ $\tan\theta > 0$，$\cot\theta > 0$ 且$\tan\theta < \cot\theta$

$\therefore$ 原式 $=\dfrac{\tan\theta+\cot\theta-(\cot\theta-\tan\theta)}{\tan\theta+\cot\theta+(\cot\theta-\tan\theta)}=\dfrac{2\tan\theta}{2\cot\theta}=\tan^2\theta$

2. 下列敘述，何者正確？(複選)

(A) $0° < \theta < 45°$時，$\sin\theta > \cos\theta$ (B) $0° < \theta < 45°$時，$\tan\theta > \cot\theta$

(C) $0° < \theta < 45°$時，$\sec\theta > \csc\theta$ (D) $45° < \theta < 90°$時，$\sec\theta > \csc\theta$

(E) $0° < \theta < 90°$時，$\sin\theta < \tan\theta < \sec\theta$

答案：(D)(E)

解析：

$0° < \theta < 45°$	$\theta = 45°$	$45° < \theta < 90°$
$\sin\theta < \cos\theta$	$\sin\theta = \cos\theta$	$\sin\theta > \cos\theta$
$\tan\theta < \cot\theta$	$\tan\theta = \cot\theta$	$\tan\theta > \cot\theta$
$\sec\theta < \csc\theta$	$\sec\theta = \csc\theta$	$\sec\theta > \csc\theta$

3. 設 θ 是一個銳角，則下列何者爲真？(複選)

(A) $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ (B) $\tan\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ (C) $\sin\theta=\dfrac{\tan\theta}{\cot\theta}$ (D) $\cos\theta=\dfrac{\cot\theta}{\csc\theta}$ (E) $\sec\theta=\dfrac{\tan\theta}{\sin\theta}$

答案：(A)(D)(E)

解析：商數關係：$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$，$\cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

二、填充題(每題 10 分)

4. 求$\tan^2 44°\tan^2 46° - \cot^2 46° + \csc^2 46°$的值 =__________。

答案：2

解析：

$\tan^2 44°\tan^2 46° - \cot^2 46° + \csc^2 46° = \tan^2 44°\cot^2 44° + (\csc^2 46° - \cot^2 46°) = 1 + 1 = 2$

5. 設θ為銳角，$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{5}$，求$\sin\theta=$__________。

答案：$\dfrac{4}{5}$

解析：

$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{5} \Rightarrow (\sin\theta-\cos\theta)^2=(\dfrac{1}{5})^2 \Rightarrow \sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{1}{25}$

$\Rightarrow 1-2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{25} \Rightarrow \sin\theta\cos\theta=\dfrac{12}{25}$

因為$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1+2\times\dfrac{12}{25}=\dfrac{49}{25}$

又θ為一銳角，故$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{7}{5}$，$\begin{cases}\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{5}\cdots\cdots① \\ \sin\theta+\cos\theta=\dfrac{7}{5}\cdots\cdots②\end{cases}$

由①+②得 $2\sin\theta=\dfrac{8}{5}$，故$\sin\theta=\dfrac{4}{5}$

6. 設 $0°<x<45°$，若$\tan x+\cot x=\dfrac{25}{12}$，則

(1)$\sin x\cdot\cos x$之值為__________，(2)$\sin x-\cos x$之值為__________。

答案：(1)$\dfrac{12}{25}$　(2)$-\dfrac{1}{5}$

解析：

(1) $\tan x+\cot x=\dfrac{\sin x}{\cos x}+\dfrac{\cos x}{\sin x}=\dfrac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cdot\cos x}=\dfrac{1}{\sin x\cdot\cos x}=\dfrac{25}{12}$，$\therefore\ \sin x\cdot\cos x=\dfrac{12}{25}$

(2)$(\sin x-\cos x)^2=\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x=1-2\times\dfrac{12}{25}=\dfrac{1}{25}$

$\therefore\ \sin x-\cos x=\pm\dfrac{1}{5}$，又 $0°<x<45°$ $\therefore\ \cos x>\sin x$ $\therefore\ \sin x-\cos x=-\dfrac{1}{5}$

7. 化簡下列各值：

(1)$\dfrac{1}{1+\sin^3\theta}+\dfrac{1}{1+\cos^3\theta}+\dfrac{1}{1+\tan^3\theta}+\dfrac{1}{1+\cot^3\theta}+\dfrac{1}{1+\sec^3\theta}+\dfrac{1}{1+\csc^3\theta}=$__________。

(2) $2(1-\tan^4\theta)\cos^2\theta+2\sin^2\theta\sec^2\theta=$__________。

答案：(1) 3　(2) 2

解析：

(1) $\dfrac{1}{1+\sin^3\theta}+\dfrac{1}{1+\csc^3\theta}=\dfrac{1+\csc^3\theta+1+\sin^3\theta}{(1+\sin^3\theta)(1+\csc^3\theta)}=\dfrac{1+\csc^3\theta+1+\sin^3\theta}{1+\csc^3\theta+\sin^3\theta+\sin^3\theta\csc^3\theta}$

$=\dfrac{1+\csc^3\theta+1+\sin^3\theta}{1+\csc^3\theta+\sin^3\theta+1}$

同理$\dfrac{1}{1+\cos^3\theta}+\dfrac{1}{1+\sec^3\theta}=1$，$\dfrac{1}{1+\tan^3\theta}+\dfrac{1}{1+\cot^3\theta}=1$

故原式 $=1+1+1=3$

(2)原式$= 2(1+\tan^2\theta)(1-\tan^2\theta)\cos^2\theta + 2\sin^2\theta \cdot \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

$= 2\sec^2\theta(1-\tan^2\theta)\cos^2\theta + 2(\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta})^2 = 2(1-\tan^2\theta) + 2\tan^2\theta = 2$

8. $(\sin\theta+\csc\theta)^2+(\cos\theta+\sec\theta)^2-(\tan\theta+\cot\theta)^2$之值爲__________。

答案：5

解析：$(\sin\theta+\csc\theta)^2+(\cos\theta+\sec\theta)^2-(\tan\theta+\cot\theta)^2$

$= (\sin^2\theta+2+\csc^2\theta)+(\cos^2\theta+2+\sec^2\theta)-(\tan^2\theta+2+\cot^2\theta)$

$=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+2+(\csc^2\theta-\cot^2\theta)+(\sec^2\theta-\tan^2\theta) =1+2+1+1=5$

9. 設$\angle A$爲銳角，且 $0°<4\angle A<90°$，若$\tan 4A=\cot 2A$，則$\sin 2A+\cos 3A$之值爲__________。

答案：$\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$

解析：

因爲 $0°<4\angle A<90°$，所以 $0°<90°-2\angle A<90°$

又由餘角公式，則$\tan 4A=\cot 2A$，故得 $4A+2A=90° \quad \Leftrightarrow \quad 6A=90°$

$\therefore \quad A=15°$，因此$\sin 2A+\cos 3A=\sin 30°+\cos 45°=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$

10. .設方程式$x^2-(\tan\theta+\cot\theta)\,x-2=0$ 有一根爲 $3+\sqrt{7}$，則$\sin\theta\cos\theta$ 之值爲__________。

答案：$\dfrac{\sqrt{7}}{14}$

解析：

設$x^2-(\tan\theta+\cot\theta)\,x-2=0$ 之二根爲 $3+\sqrt{7}$，β

二根之積$(3+\sqrt{7})\,\beta=-2\Rightarrow\beta=\dfrac{-2}{3+\sqrt{7}}=\sqrt{7}-3$

又二根之和$(3+\sqrt{7})+(\sqrt{7}-3)=\tan\theta+\cot\theta=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}$，　$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{2\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$

11. $2\sec\theta-3\tan\theta=1$，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，求$\sin\theta+\cos\theta=$__________。

答案：$\dfrac{4\pm\sqrt{6}}{5}$

解析：

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos\theta\neq 0$

$2\sec\theta-3\tan\theta=1\Rightarrow\dfrac{2}{\cos\theta}-\dfrac{3\sin\theta}{\cos\theta}=1\Rightarrow\dfrac{2-3\sin\theta}{\cos\theta}=1$………①

平方之 $\dfrac{4-12\sin\theta+9\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=1$；同乘$\cos^2\theta \quad \Rightarrow \quad 4-12\sin\theta+9\sin^2\theta=\cos^2\theta$

$\Rightarrow \quad 4-12\sin\theta+9\sin^2\theta=1-\sin^2\theta$

$\Rightarrow \quad 10\sin^2\theta - 12\sin\theta + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\theta = \dfrac{6 \pm \sqrt{6}}{10}$

又由① $\dfrac{2-3\sin\theta}{\cos\theta} = 1 \Rightarrow \cos\theta = 2 - 3\sin\theta$

$\sin\theta + \cos\theta = \sin\theta + (2 - 3\sin\theta) = 2 - 2\sin\theta = 2 - \dfrac{6 \pm \sqrt{6}}{5} = \dfrac{4 \pm \sqrt{6}}{5}$

12. $\log_4(1 + \sin\theta) + \log_4(1 - \cos\theta) - \log_2|1 + \sin\theta - \cos\theta| =$__________。

答案：$-\dfrac{1}{2}$

解析：

原式$= \log_4 \dfrac{(1+\sin\theta)(1-\cos\theta)}{(1+\sin\theta-\cos\theta)^2}$

$= \log_4 \dfrac{1-\cos\theta+\sin\theta-\sin\theta\cos\theta}{1+\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta-2\cos\theta-2\sin\theta\cos\theta} = \log_4\dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}$

13. 若$\sin\theta = \cot\theta$，求

(1)$\cos\theta =$__________。 (2)$3\cos\theta + 2\cos^2\theta + \cos^3\theta + \cos^4\theta =$__________。

答案：(1)$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (2) 3

解析：

(1) $\sin\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} \quad \Rightarrow \quad \sin^2\theta = \cos\theta \quad \Rightarrow \quad 1 - \cos^2\theta = \cos\theta \quad \Rightarrow \quad \cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$

$\Rightarrow \quad \cos\theta = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$（$\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$ 不合）

(2) $3\cos\theta + 2\cos^2\theta + \cos^3\theta + \cos^4\theta = 3\cos\theta + 2\cos^2\theta + \cos^2\theta(\cos\theta + \cos^2\theta)$

$= 3\cos\theta + 3\cos^2\theta = 3$

14. 已知$\sin^3\theta + \cos^3\theta = 1$，則$\sin\theta + \cos\theta$ 之値爲________。

答案：1

解析：

令$\sin\theta + \cos\theta = t \quad \therefore \quad t^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta \Rightarrow \sin\theta\cos\theta = \dfrac{t^2-1}{2}$

$\sin^3\theta + \cos^3\theta = (\sin\theta + \cos\theta)^3 - 3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta + \cos\theta) = 1$

$\Rightarrow \quad t^3 - 3\left(\dfrac{t^2-1}{2}\right)t = 1 \quad \Rightarrow \quad (t-1)^2(t+2) = 0$，但$t \neq -2 \quad \therefore \quad t = 1$

15.若 $2x^2 + kx + 1 = 0$ 之二根爲$\sin\theta$，$\cos\theta$且 $0° \le \theta \le 90°$，則(1)$k =$__________。

(2) $\sin^3\theta + \cos^3\theta =$__________。

答案：(1) $-2\sqrt{2}$ (2)$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

解析：

(1) $\begin{cases} \sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{k}{2} \\ \sin\theta\cdot\cos\theta=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

$\because\quad (\sin\theta+\cos\theta)^2=(-\dfrac{k}{2})^2 \quad\Rightarrow 1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{k^2}{4} \quad\Rightarrow\quad k^2=8 \quad\Rightarrow\quad k=\pm 2\sqrt{2}$（取負）

（$\because\quad \sin\theta$，$\cos\theta>0 \quad\Rightarrow\quad \sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{k}{2}>0 \quad\therefore\quad k<0$）

(2) $\begin{cases} \sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2} \\ \sin\theta\cdot\cos\theta=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)$

$=\sqrt{2}(1-\dfrac{1}{2})=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

16. 設$f(n)=\sin^n\theta+\cos^n\theta$，則 $4f(6)-6f(4)+5$ 之值爲___________。

答案：3

解析：

$\because\quad 4f(6)-6f(4)+5=4(\sin^6\theta+\cos^6\theta)-6(\sin^4\theta+\cos^4\theta)+5$

$=4[(\sin^2\theta+\cos^2\theta)(\sin^4\theta-\sin^2\theta\cos^2\theta+\cos^4\theta)]-6[(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta]+5$

$=4[(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-3\sin^2\theta\cos^2\theta]-6+12\sin^2\theta\cos^2\theta+5=4-6+5=3$

17.設 $0°<\theta<90°$，且$\sin\theta\cdot\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，試求$\sec\theta+\csc\theta$之值___________。

答案： $2\sqrt{2}$

解析：

因爲$\sin\theta\cdot\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，而$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，

故$(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+2\sin\theta\cos\theta=1+2\cdot\dfrac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad (\sin\theta+\cos\theta)^2=2$

因爲 $0°<\theta<90°$，故$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$

$\sec\theta+\csc\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}+\dfrac{1}{\sin\theta}=\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta\sin\theta}=\dfrac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}$

三、證明題(每題 10 分)

18. 試證$\dfrac{1+\csc\theta-\cot\theta}{1+\csc\theta+\cot\theta}=\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$。

【證明】

$\dfrac{1+\csc\theta-\cot\theta}{1+\csc\theta+\cot\theta}=\dfrac{(\csc^2\theta-\cot^2\theta)+\csc\theta-\cot\theta}{1+\csc\theta+\cot\theta}$

$$=\frac{(\csc\theta+\cot\theta)(\csc\theta-\cot\theta)+(\csc\theta-\cot\theta)}{1+\csc\theta+\cot\theta}=\frac{(\csc\theta+\cot\theta+1)(\csc\theta-\cot\theta)}{1+\csc\theta+\cot\theta}$$

$$=\csc\theta-\cot\theta=\frac{1}{\sin\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$$

19. 試證 $\tan\theta+\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}=\sec\theta$。

【證明】

$$\tan\theta+\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}=\frac{\sin\theta(1+\sin\theta)+\cos^2\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$$

$$=\frac{\sin\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)}=\frac{\sin\theta+1}{\cos\theta(1+\sin\theta)}=\frac{1}{\cos\theta}=\sec\theta$$