高雄市明誠中學 高一數學平時測驗					日期：93.04.08
範圍	2-1 銳角之三角函數 +Ans	班級		姓名	
		座號			

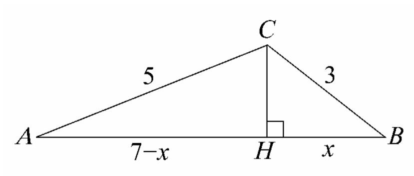
一. 單選題(每題 10 分)

1.$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=7$，$\overline{BC}=3$，$\overline{CA}=5$，則

(A) $\sin B=\frac{3}{5}$ (B) $\sin B=\frac{3}{7}$ (C) $\cos B=\frac{5}{7}$ (D) $\cos B=\frac{4}{5}$ (E)以上皆非

答案：(E)

解析：過 C 點作 $\overline{CH}\perp\overline{AB}$ 於 H

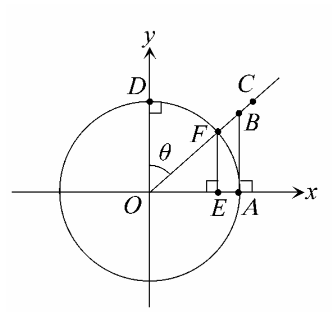


設 $\overline{BH}=x$，$\overline{AH}=7-x$，則 $\sqrt{5^2-(7-x)^2}=\sqrt{3^2-x^2}$

$\Rightarrow\ x=\frac{33}{14}$

$\therefore\ \overline{CH}=\frac{15\sqrt{3}}{14}$ $\therefore\ \sin B=\frac{\frac{15\sqrt{3}}{14}}{3}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$，$\cos B=\frac{\frac{33}{14}}{3}=\frac{11}{14}$

2.下圖為單位圓，$\overline{OA}$，$\overline{OD}$ 均為半徑，則$\cot\theta$為圖中的哪個線段？



(A) $\overline{DC}$ (B) $\overline{OC}$ (C) $\overline{OB}$ (D) $\overline{AB}$ (E) $\overline{EF}$

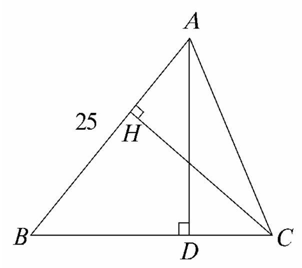
答案：(D)

解析：如圖，$\angle OBA=\angle COD=\theta$，$\cot\theta=\frac{\overline{AB}}{\overline{AO}}=\frac{\overline{AB}}{1}=\overline{AB}$

3. (複選)$\triangle ABC$ 中，$\overline{AD}$ 垂直 $\overline{BC}$ 於 D，已知 $\overline{AB}=25$，$\sin B=\frac{3}{5}$，$\sin C=\frac{15}{17}$，則下列敘述何者正確？(A) $\overline{AD}=15$ (B) $\overline{DC}=8$ (C) $\overline{AC}=17$ (D) $\overline{BC}=28$ (E) $\sin A=\frac{15}{17}$

答案：(A)(B)(C)(D)

解析：



(1) $\sin B=\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AD}}{25}=\frac{3}{5}\ \Rightarrow\ \overline{AD}=15$

(2) $\sin C=\frac{15}{17}\ \Rightarrow\ \tan C=\frac{15}{8}=\frac{\overline{AD}}{\overline{CD}}\ \Rightarrow\ \overline{CD}=8$

(3) $\cos B=\frac{\overline{BD}}{25}=\frac{4}{5}\ \therefore\ \overline{BD}=20\ \Rightarrow\ \overline{BC}=28$

(4) $\sin C=\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}=\frac{15}{17}\ \Rightarrow\ \overline{AC}=17$

(5)作 $\overline{CH}\perp\overline{AB}$

$\because\ \triangle ABC=\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{AD}=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{CH}\ \Rightarrow\ \overline{CH}=\frac{84}{5}\ \therefore\ \sin A=\frac{\overline{CH}}{\overline{AC}}=\frac{84}{85}$

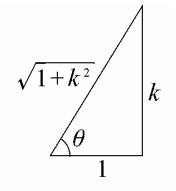
4. (複選)設 $0°<\theta<90°$，且 $\tan\theta=k$，下列何者正確？

(A) $\sin\theta=\frac{k}{\sqrt{k^2+1}}$ (B) $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$ (C) $\cot\theta=\frac{1}{k}$ (D) $\sec\theta=\sqrt{k^2+1}$

(E) $\csc\theta=\sqrt{k^2+1}$

答案：(A)(B)(C)(D)

解析：$\because\ \tan\theta=k$



$\sin\theta=\dfrac{k}{\sqrt{1+k^2}}$，$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}}$，$\tan\theta=k$，

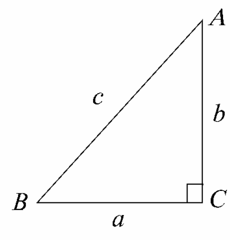
$\cot\theta=\dfrac{1}{k}$，　　$\sec\theta=\sqrt{1+k^2}$，$\csc\theta=\dfrac{\sqrt{1+k^2}}{k}$

二、填充題(每題 10 分)

5. 直角$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，若$\dfrac{3}{5}\cos A+\cos B=1$，則$a：b：c=$ ＿＿＿＿＿＿ 。

答案：8：15：17

解析：



原式 $\Rightarrow\ \dfrac{3}{5}\dfrac{b}{c}+\dfrac{a}{c}=1\ \Rightarrow\ 3b+5a=5c\ \Rightarrow\ 3b=5c-5a$

又$a^2+b^2=c^2\ \Rightarrow\ 9a^2+25(c-a)^2=9c^2\ \Rightarrow\ 34a^2-50ca+16c^2=0$

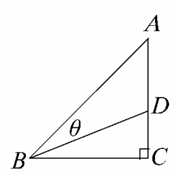
$\Rightarrow\ 17a^2-25ca+8c^2=0 17(\dfrac{a}{c})^2-25(\dfrac{a}{c})+8=0$

設$x=\dfrac{a}{c}\Rightarrow 17x^2-25x+8=0\Rightarrow(17x-8)(x-1)=0\Rightarrow x=\dfrac{8}{17},1$

故 $\dfrac{a}{c}=\dfrac{8}{17},1\Rightarrow\ a=\dfrac{8}{17}c$或$c$（不合，因爲 c爲斜邊）

$\therefore\ 3b=\dfrac{-40c}{17}+5c=\dfrac{45c}{17}\ \Rightarrow\ b=\dfrac{15}{17}c$

$\therefore\ a：b：c=\dfrac{8c}{17}：\dfrac{15c}{17}：c=8：15：17$

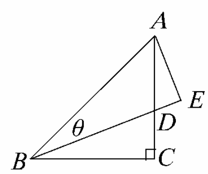


6. 如右圖：$\overline{AC}=\overline{BC}$，$\overline{AD}：\overline{DC}=3：2$，則$\tan\theta=$ ＿＿＿＿＿＿ 。

答案：$\dfrac{3}{7}$

解析：作$\overline{AE}\perp\overleftrightarrow{BE}$於$E\Rightarrow\Delta BCD\sim\Delta AED$

設$\overline{AD}=3$，$\overline{DC}=2$，$\overline{BC}=5$，$\overline{AE}=5t$，$\overline{DE}=2t$

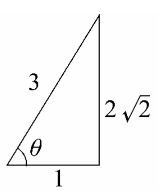


$\Rightarrow\ t=\dfrac{3}{\sqrt{29}}\ \Rightarrow\ \tan\theta=\dfrac{\overline{AE}}{\overline{BE}}=\dfrac{\dfrac{15}{\sqrt{29}}}{\sqrt{29}+\dfrac{6}{\sqrt{29}}}=\dfrac{15}{35}=\dfrac{3}{7}$

7. 設θ爲銳角且$\sec\theta=3$，求$\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}=$ ＿＿＿＿＿＿ 。

答案：6

解析：



$\Rightarrow$原式 $=\dfrac{\dfrac{1}{3}}{1+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}+\dfrac{1+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}{\dfrac{1}{3}}=\dfrac{1}{3+2\sqrt{2}}+(3+2\sqrt{2})$

$=(3-2\sqrt{2})+(3+2\sqrt{2})=6$

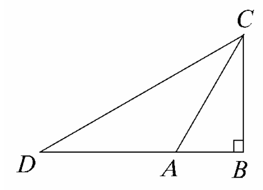
8. $\log_2\sin30° + \log_2\cos30° + \log_2\tan30° =$ ＿＿＿＿＿ 。

答案：-2

解析：

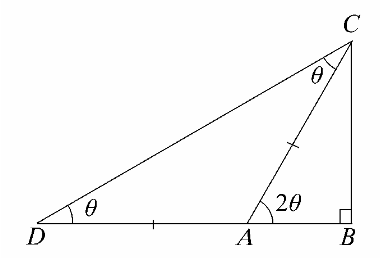
原式 $=\log_2\sin30°\cos30°\tan30° = \log_2\sin^2 30° = \log_2(\frac{1}{2})^2 = -2$

9.如圖，$\overline{BC}\perp\overline{BD}$，$\overline{AC}=\overline{AD}$，$\sin\angle CAB=\frac{5}{8}$，則$\cot D$之值爲 ＿＿＿＿＿ 。



答案：$\frac{1}{5}(8+\sqrt{39})$

解析：



令$\angle CAB=2\theta$，且 $\overline{AC}=\overline{AD}=8$

$\sin2\theta=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{5}{8} \quad\Rightarrow\quad \overline{BC}=5$，$\cos2\theta=\frac{\sqrt{39}}{8}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$

$\Rightarrow\quad \overline{AB}=\sqrt{39}$，$\therefore\quad \cot D=\frac{\overline{DB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{DA}+\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{8+\sqrt{39}}{5}$

10.求下列各值：

(1) $(1+\sin 45°+\sin 60°)(1-\cos 45°+\cos 30°)=$＿＿＿＿＿ 。

(2) $\log_6\tan 60° + \log_6\cot30° + \log_6\sec45° + \log_6\csc45° =$＿＿＿＿＿ 。

答案：(1)$\frac{5}{4}+\sqrt{3}$ (2)1

解析：

(1)原式$=(1+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2})(1-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2})=(1+\frac{\sqrt{3}}{2})^2-(\frac{\sqrt{2}}{2})^2=1+\sqrt{3}+\frac{3}{4}-\frac{2}{4}=\frac{5}{4}+\sqrt{3}$

(2)原式$=\log_6(\tan 60°\cdot\cot 30°\cdot\sec 45°\cdot\csc 45°)$

$=\log_6(\frac{\sqrt{3}}{1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{1}\cdot\frac{\sqrt{2}}{1}\cdot\frac{\sqrt{2}}{1})=\log_6 6=1$

11.$\frac{2\sin 60°\cos 30°-\sin^2 45°\tan^2 60°+\tan 45°}{\sin 30°\cos 60°-\cos^2 45°\tan^2 30°}$之値爲 ＿＿＿＿＿ 。

答案：12

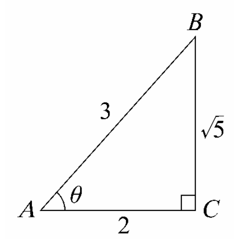
解析：

$$\frac{2\sin 60°\cos 30°-\sin^2 45°\tan^2 60°+\tan 45°}{\sin 30°\cos 60°-\cos^2 45°\tan^2 30°}=\frac{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-(\frac{\sqrt{2}}{2})^2\cdot(\sqrt{3})^2+1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-(\frac{\sqrt{2}}{2})^2\cdot(\frac{\sqrt{3}}{3})^2}=\frac{1}{\frac{1}{4}-\frac{1}{6}}=12$$

12.設θ是一個銳角且$\cos\theta=\frac{2}{3}$，則(1) $\sin\theta=$＿＿＿＿＿ 。 (2) $\tan\theta=$＿＿＿＿＿ 。

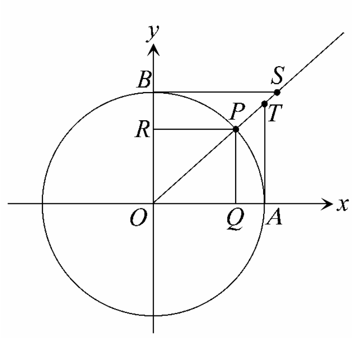
答案：(1)$\frac{\sqrt{5}}{3}$ (2)$\frac{\sqrt{5}}{2}$

解析：



$\cos\theta=\frac{2}{3}\Rightarrow\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}$，$\tan\theta=\frac{\sqrt{5}}{2}$

13.如圖，$\overline{PQ}$，$\overline{TA}$都垂直x軸，$\overline{PR}$，$\overline{SB}$都垂直y軸，A，T，B在圓上，已知$\overline{AT}=\dfrac{3}{5}$，$\overline{OP}=1$，則$\overline{OQ}\cdot\overline{OS}+\overline{BS}$之值爲 ＿。



答案：$\dfrac{10}{3}$

解析：

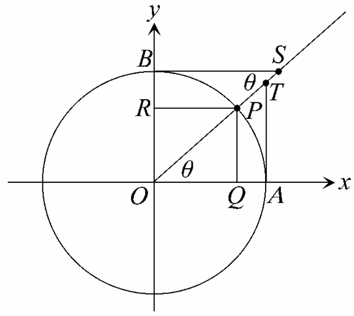
(1)令$\theta=\angle TOA=\angle OSB\quad\Rightarrow\quad\tan\theta=\dfrac{\overline{AT}}{\overline{OA}}==\dfrac{\overline{AT}}{1}=\dfrac{3}{5}$

$\Rightarrow\quad\sin\theta=\dfrac{3}{\sqrt{34}}$，$\cos\theta=\dfrac{5}{\sqrt{34}}$，$\cot\theta=\dfrac{5}{3}$，$\sec\theta=\dfrac{\sqrt{34}}{5}$，$\csc\theta=\dfrac{\sqrt{34}}{3}$

(2) $\csc\theta=\dfrac{\overline{OS}}{\overline{OB}}=\dfrac{\overline{OS}}{1}\Rightarrow\overline{OS}=\csc\theta=\dfrac{\sqrt{34}}{3}$

$\cos\theta=\dfrac{\overline{OQ}}{\overline{OP}}=\dfrac{\overline{OQ}}{1}\Rightarrow\overline{OQ}=\cos\theta=\dfrac{5}{\sqrt{34}}$，

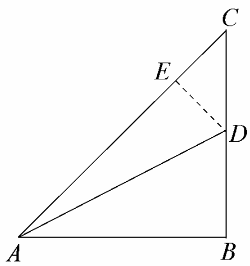
$\cot\theta=\dfrac{\overline{BS}}{\overline{OS}}=\dfrac{\overline{BS}}{1}\Rightarrow\overline{BS}=\cos\theta=\dfrac{5}{3}$



(3)$\therefore\quad\overline{OQ}\cdot\overline{OS}+\overline{BS}=\dfrac{5}{\sqrt{34}}\cdot\dfrac{\sqrt{34}}{3}+\dfrac{5}{3}=\dfrac{10}{3}$

14.設等腰△ABC中，$\angle B=90°$，若D是$\overline{BC}$的中點，則$\tan\angle BAD=$＿＿＿，又$\tan\angle CAD=$＿＿＿。

答案：$\dfrac{1}{2}$；$\dfrac{1}{3}$



解析：

如右圖所示：在△ABC中，設$\overline{AB}=\overline{BC}=2\sqrt{2}$，而$\angle B=90°$，故$\overline{AC}=\sqrt{2}\,\overline{BC}=4$，過$D$作$\overline{DE}\perp\overline{AC}$，令其垂足爲$E$，因爲$\angle C=45°$

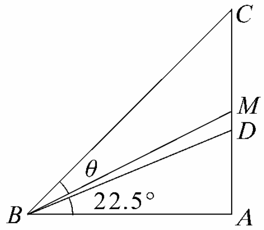
$\overline{DE}=\overline{EC}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\overline{CD}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2}==1$

因爲$\overline{AE}=\overline{AC}-\overline{EC}=3$，$\tan\angle BAD=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{AB}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$，$\tan\angle CAD=\dfrac{\overline{DE}}{\overline{AE}}=\dfrac{1}{3}$

15.設△ABC中，$\angle C=90°$，$\overline{AC}=5$，$\overline{BC}=12$，則(1) $\sin B=$＿＿＿＿。 (2) $\cos B=$＿＿＿＿＿。

答案：(1)$\dfrac{5}{13}$ (2)$\dfrac{12}{13}$

16.如右圖，等腰直角△ABC中，$\overline{BD}$爲$\angle B$之角平分線，$\overline{BM}$爲$\overline{AC}$之中線，若$\angle CBM=\theta$，則$\cot\theta=$＿＿＿＿＿。



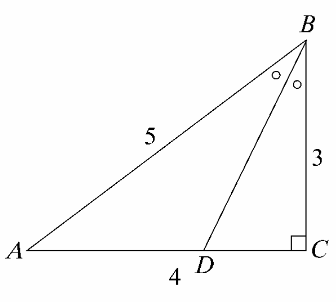
答案：3

解析：同 14 題

17.△ABC中，$\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=3$，$\overline{CA}=4$，$\angle B$的分角線交$\overline{AC}$於D，則

(1) $\cos B=$＿＿＿＿＿。 (2) $\tan\angle DBC=$＿＿＿＿＿。

答案：(1)$\dfrac{3}{5}$　(2)$\dfrac{1}{2}$



解析：

(1)$\triangle ABC$ 中，　$\angle C = 90°$　$\Rightarrow$　$\cos B = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \dfrac{3}{5}$

(2) $\overline{BD}$ 爲$\angle B$ 之分角線(內分比) $\overline{AD}$ ： $\overline{DC} = \overline{AB}$ ： $\overline{BC} = 5：3$

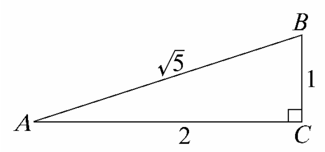
$\Rightarrow$　$\overline{CD} = 4 \times \dfrac{3}{8} = \dfrac{3}{2}$ ，故 $\tan\angle DBC = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{BC}} = \dfrac{\frac{3}{2}}{3} = \dfrac{1}{2}$

18.設θ爲銳角且$\csc\theta = \sqrt{5}$，則$\cot\theta =$ ＿＿＿＿＿＿，又$\dfrac{\tan\theta}{1+\sin\theta} + \dfrac{\cot\theta}{1-\sin\theta}$ $=$ ＿＿＿＿＿＿。

答案：2，$\dfrac{25+3\sqrt{5}}{8}$

解析：

如圖：作$\triangle ABC$，使得$\angle C = 90°$，$\overline{AB} = \sqrt{5}$ ，而$\overline{BC} = 1$，由畢氏定理知，$\overline{AC} = 2$，故$\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\tan\theta = \dfrac{1}{2}$ ，$\cot\theta = 2$



故所求之值爲

$$\frac{\tan\theta}{1+\sin\theta} + \frac{\cot\theta}{1-\sin\theta} = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{\sqrt{5}}} + \frac{2}{1-\frac{1}{\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{5}}{2(\sqrt{5}+1)} + \frac{4\sqrt{5}}{2(\sqrt{5}-1)} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)+4\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}{2(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}$$

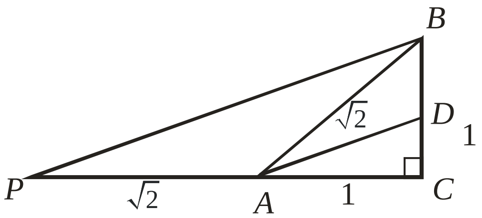
$$= \frac{25+3\sqrt{5}}{8}$$

19.$\triangle ABC$中，$\angle C = 90°$， $\overline{AC} = \overline{BC}$ ，$\angle A$的分角線交 $\overline{BC}$ 於D，則

(1) $\sin\angle DAB =$＿＿＿＿＿＿ 。　(2) $\tan\angle DAB =$＿＿＿＿＿＿ 。

答案：(1)$\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$　(2)$\sqrt{2}-1$

解析：



(1)延長$\overrightarrow{CA}$至P ，使$\overline{PA} = \overline{PB} = \sqrt{2}$ ，$\angle DAB = \angle CAD = \angle P$

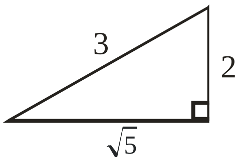
$\overline{PB} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2 + 1^2} = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$ ，

$$\sin(\angle DAB) = \sin(\angle CAD) = \sin P = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{\sqrt{4^2-(2\sqrt{2})^2}} = \frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

(2) $\tan\angle DAB = \tan P = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1$

20.$\triangle ABC$中，$\angle A + \angle B = 90°$，$\sin A = \dfrac{2}{3}$，則(1) $\cot A =$ ＿＿＿＿＿＿。　(2) $\csc B =$＿＿＿＿＿＿。

答案：(1)$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　(2)$\dfrac{3}{\sqrt{5}}$

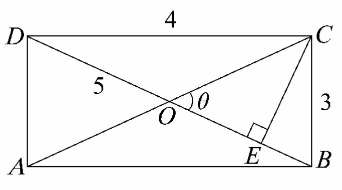
解析：(1)$\sin A=\dfrac{2}{3}\Rightarrow$ 

$\Rightarrow \cot A=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

(2)$\csc B=\sec A=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$

21.長方形 $ABCD$ 的兩邊 $\overline{AB}$，$\overline{BC}$ 的長分別爲 4，3，若兩對角線 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 所夾的銳角爲 θ，求 $\sin\theta$ 及 $\tan\theta$ 之值。

答案：$\sin\theta=\dfrac{24}{25}$，$\tan\theta=\dfrac{24}{7}$



解析：

如圖所示：長方形 $ABCD$ 的對角線 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 所夾的銳角 θ，

作 $\overline{CE}\perp\overline{BD}$，母子相似$\Rightarrow \overline{BD}^2=\overline{BE}\cdot\overline{BD}$

$\therefore\ \overline{BE}=\dfrac{\overline{BC}^2}{\overline{BD}}=\dfrac{9}{5}$，又 $\overline{OE}=\overline{OB}-\overline{BE}=\dfrac{5}{2}-\dfrac{9}{5}=\dfrac{7}{10}$，且斜邊上的高 $\overline{CE}=\dfrac{\overline{BC}\cdot\overline{CD}}{\overline{BD}}=\dfrac{12}{5}$

在△OCE 中，$\sin\theta=\dfrac{\overline{CE}}{\overline{OC}}=\dfrac{\frac{12}{5}}{\frac{5}{2}}=\dfrac{24}{25}$，$\tan\theta=\dfrac{\overline{CE}}{\overline{OE}}=\dfrac{\frac{12}{5}}{\frac{7}{10}}=\dfrac{24}{7}$