高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：93.04.01					
範圍	1-5 對數查表+Ans	班級		姓名	
		座號			

一、複選題(每題 10 分)

1. 已知$\log 56.7 = 1.7536$，則下列敘述何者正確？

(A) $\log 56700 = 3.7536$ (B) $\log 0.000567 = -3.2464$ (C) $10^{0.7536} = 5.67$

(D)若$\log x = 3.7536$，則$x = 56700$ (E)若$\log y = -5.2464$，則$y = 0.00000567$

答案：(B)(C)(E)

解析：

(A) $\log 56700 = \log(56.7 \times 1000) = 1.7536 + 3 = 4.7536$

(B) $\log 0.000567 = \log(56.7 \times 10^{-5}) = 1.7536 - 5 = -3.2464$

(C) $\log 5.67 = 0.7536 \quad \Rightarrow \quad 10^{0.7536} = 5.67$

(D) $\log 5670 = 3.7536 \quad \Rightarrow \quad x = 5670$

(E) $\log y = -5.2464 = -5.2464 - 6 + 0.7536 = -6 + \log 5.67 \quad \Rightarrow \quad y = 0.00000567$

2.已知$\log 2 = 0.3010$，$\log 3 = 0.4771$ 且$a = 2^{2004}$，則下列敘述何者正確？

(A) a的個位數字為 6 (B) a為 602 位數 (C) a的首位數字為 1

(D) a的首位數字為 2 (E) $a < 3^{1332}$

答案：(A)(C)(E)

解析：

(1)

n	1	2	3	4	5	6	…
2^n個位數	2	4	8	6	2	4	…

∴ 2^n個位數字，依 2，4，8，6，2，4，8，6，…週期循環變化

$2004 \div 4 = 501$ ∴ a的個位數字 $= 6$

(2) $\log a = 2004 \times 0.3010 = 603.204$，首數 $= 603 \quad \Rightarrow \quad a$為 604 位數

尾數 $= 0.204$ 且$\log 1 < 0.204 < \log 2 \quad \Rightarrow \quad a$首位數字為 1

(3) $\log 3^{1332} = 1332 \times 0.4771 = 635.4972$

$\log 2^{2004} = 603.204 \quad \Rightarrow \quad \log 2^{2004} < \log 3^{1332} \quad \Rightarrow \quad 2^{2004} < 3^{1332}$

∴ 應選(A)(C)(E)

3.下列對數，選出首數相同者：

(A) $\log 1999$ (B) $\log 19990$ (C) $\log 3999$ (D) $\log 0.01999$ (E) $\log \frac{1}{1999}$

答案：(A)(C)

解析：

(A) $\log 1999 = \log(1.999 \times 10^3) = 3 + \log 1.999$

(B) $\log 19990 = \log(1.999 \times 10^4) = 4 + \log 1.999$

(C) $\log 3999 = \log(3.999 \times 10^3) = 3 + \log 3.999$

(D) $\log 0.01999 = \log(1.999 \times 10^{-2}) = -2 + \log 1.999$

(E) $\log\dfrac{1}{1999} = -\log 1999 = -\log(1.999\times 10^3) = -3-\log 1.999 = -4+(1-\log 1.999)$

故(A)(C)首數相同

4.下列對數，選出尾數相同者：

(A) $\log 327$　(B) $\log 723$　(C) $\log\dfrac{1}{327}$　(D) $\log 0.0327$　(E) $\log 327000$

答案：(A)(D)(E)

解析：

(A) $\log 327 = \log(3.27\times 10^2) = 2+\log 3.27$

(B) $\log 723 = \log(7.23\times 10^2) = 2+\log 7.23$

(C) $\log\dfrac{1}{327} = -\log 327 = -\log(3.27\times 10^2) = -2-\log 3.27 = -3+(1-\log 3.27)$

(D) $\log 0.0327 = \log(3.27\times 10^{-2}) = -2+\log 3.27$

(E) $\log 327000 = \log(3.27\times 10^5) = 5+\log 3.27$

故(A)(D)(E)尾數相同

二、填充題(每題 10 分)

1. 已知$\log 2 = 0.3010$，$\log 3 = 0.4771$，$\log 7 = 0.8451$，若 7^{60}爲m位數且最高位數字爲n，則數對$(m，n) =$ ＿＿＿＿＿＿。

答案：(51，5)

解析：

$\log 5 = \log\dfrac{10}{2} = \log 10-\log 2 = 1-0.3010 = 0.6990$

$\log 6 = \log(2\times 3) = \log 2+\log 3 = 0.3010+0.4771 = 0.7781$

$\log 7^{60} = 60\log 7 = 60\times 0.8451 = 50+0.706$，首數 $= 50$　$\therefore$　7^{60}爲 51 位數，$m = 51$

$(\log 5 = 0.6990) <$ (尾數 $= 0.706$) $< (0.7781 = \log 6)$　$\therefore$　最高位數字$n = 5$

2. 已知 47^{100}爲 168 位數，則 47^{23}爲＿＿＿＿＿＿位數。

答案：39

解析：

47^{100}爲 168 位數　$\Rightarrow$　$\log 47^{100}$的首數 $= 167$　$\therefore$　$167 \le \log 47^{100} < 168$

$\Rightarrow$　$1.67 \le \log 47 < 1.68$，$\log 47^{23} = 23\log 47$　$\Rightarrow$　$1.67\times 23 \le \log 47^{23} < 1.68\times 23$

$\Rightarrow$　$38.41 \le \log 47^{23} < 38.64$　$\Rightarrow$　$\log 47^{23}$的首數 $= 38$　$\Rightarrow$　47^{23}爲 39 位數

3. 年利率 8%，每年複利一次，欲使n年後本利和達到本金的 2 倍，則n至少爲＿＿＿＿＿＿，$n\in N$。($\log 3 = 0.3010,\ \log 1.08 = 0.334$)

答案：10

設本金 $P \Rightarrow P(1+\dfrac{8}{100})^n \ge 2P \Rightarrow$　$(1+\dfrac{8}{100})^n \ge 2$

取log $\Rightarrow \log(1+\frac{8}{100})^n \geq \log 2 \Rightarrow n\log 1.08 \geq \log 2$

$$n \geq \frac{\log 2}{\log 1.08} = \frac{0.3010}{0.0334} = 9.\cdots\cdots \Rightarrow n \geq 10$$

4. 已知 $10^{0.8698} = 7.41$，$10^{0.8704} = 7.42$，利用內插法得log7.4142 之值爲__________。（寫到小數第四位，以下四捨五入）

答案：0.8701

解析：$\log 7.41 = 0.8698$，$\log 7.42 = 0.8704$，

由內插法：

x	$\log x$
7.41	0.8698
7.4142	y
7.42	0.8704

$$\therefore \quad \frac{7.4142-7.41}{7.42-7.41} = \frac{y-0.8698}{0.8704-0.8698} \quad \therefore \quad y = 0.870052 \doteqdot 0.8701$$

5.已知 $\log 4.37 = 0.6405$，$\log 4.38 = 0.6415$，則

(1)若 $\log x = 2.6412$，則 $x =$ __________。(2)若 $\log y = -2.3590$，則 $y =$ __________。

答案：(1) 437.7　(2) 0.004375

解析：

(1) $\log x = 2.6412 \quad \Rightarrow \quad \log\frac{x}{100} = 0.6412$

	x	$\log x$		
0.01	4.37	0.6405	0.0007	0.001
	$\frac{x}{100}$	0.6412		
	4.38	0.6415		

$$\frac{k}{0.01} = \frac{0.0007}{0.001} \Rightarrow k = \frac{0.0007}{0.001} \times 0.01 \Rightarrow \frac{x}{100} = 4.37 + \frac{0.0007}{0.001} \times 0.01 = 4.377，x = 437.7$$

(2) $\log y = -2.3590 = -3 + 0.641 \quad \Rightarrow \quad \log 10^3 y = 0.641$

	x	$\log x$		
0.01	4.37	0.6405	0.0005	0.001
	$10^3 y$	0.641		
	4.38	0.6415		

$$\frac{k}{0.01} = \frac{0.0005}{0.001} \Rightarrow k = \frac{0.0005}{0.001} \times 0.01 \Rightarrow 10^3 y = 4.37 + \frac{0.0005}{0.001} \times 0.01 = 4.375，y = 0.004375$$

6.附常用對數表一小段：

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	表尾差 1	2	3	4	5	6	7	8	9
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8

由上表得 $\log(51.67)^{-28} =$ __________。

答案：-47.9696

解析：

$\log(51.67)^{-28} = -28\log 51.67 = -28\log(10\times 5.167) = -28\times(1+\log 5.167)$

由查表及表尾差知$\log 5.167 = 0.7126 + 0.0006 = 0.7132$

$\therefore$ 原式 $= -28(1+0.7132) = -47.9696$

7.利用下列對數表計算$\sqrt[4]{6.35}\times(0.6327)^2 =$ ＿＿＿＿＿。（小數取四位）

x	6.30	6.31	6.32	6.33	6.34	6.35	6.36	6.37
$\log x$	0.7993	0.8000	0.8007	0.8014	0.8021	0.8028	0.8035	0.8041

答案：0.6354

解析：

令$x = \sqrt[4]{6.35}\times(0.6327)^2$

$\therefore$ $\log x = \dfrac{1}{4}\log 6.35 + 2\log 0.6327 = -1 + 0.8031 \quad\Rightarrow\quad x = 0.6354$（由內插法）

8.已知$\log 7 = 0.8451$，$\log 3 = 0.4771$，則$\dfrac{3^{60}}{7^{20}}$的整數部分為＿＿＿＿＿位數。

答案：12

解析：$\log\dfrac{3^{60}}{7^{20}} = 60\log 3 - 20\log 7 = 28.626 - 16.902 = 11.724$

9. 已知$\log 4.16 = 0.6191$，$\log 4.17 = 0.6201$，利用內插法求$\log 4167$之值為＿＿＿＿＿。（取小數點後四位）

答案：0.6198

解析：

$\log 4167 = \log(4.167\times 10^3) = 3 + \log 4.167$，設$\log 4.167 = x$

$$0.01\left[\begin{array}{l} 0.007\left[\begin{array}{l}\log 4.16 = 0.619 \\ \log 4.167 = x\end{array}\right]x-0.6191 \\ \log 4.17 = 0.6201 \end{array}\right]0.001$$

$\Rightarrow \dfrac{0.007}{0.01} = \dfrac{x-0.6191}{0.001} \quad\Rightarrow\quad x = 0.6191 + 0.0007 = 0.6198$

10.設$\log 1.03 = 10a$，$\log 1.04 = 10b$，試以內插法求$\log 103.6$之值為＿＿＿＿＿。（以a，b表之）

答案：$2 + 4a + 6b$

解析：

$\log 1.03 = 10a$，$\log 1.036 = y$，$\log 1.04 = 10b$

$\dfrac{0.006}{0.01} = \dfrac{y-10a}{10b-10a} \quad\Rightarrow\quad y = \dfrac{6}{10}(10b - 10a) + 10a = 4a + 6b \quad\therefore\quad \log 1.036 = 4a + 6b$

$\log 103.6 = 2 + \log 1.036 = 2 + 4a + 6b$

11.阿牛將 10 萬元存入銀行，以年利率 6%，每年複利計息一次，則至少需要＿＿＿＿＿年，方使利息部分超過 15 萬元。($\log 1.06 = 0.0253$)

答案：16
解析：

n年後本利和 $= 100000(1+0.06)^n > 100000+150000 \quad \Rightarrow \quad (1.06)^n > \dfrac{25}{10}$

$\Rightarrow \quad \log(1.06)^n > \log25-\log10 \quad \Rightarrow \quad n \times (0.0253) > \log100-\log4-1 = 0.398$

$\Rightarrow \quad n > \dfrac{0.398}{0.0253} \fallingdotseq 15.7 \quad \therefore \quad n \geq 16$

12.若A、B均為三位正整數且$B>900$，已知$\log B$的尾數為$\log A$尾數的 2 倍，則數對$(A，B)=$__________。
答案：(310，961)
解析：因為$\log B$的尾數為$\log A$尾數的 2 倍

令$\log A = 2+\alpha$，其中 $0<\alpha<\dfrac{1}{2}$ ，則$\log B = 2+2\alpha$

$\therefore \quad \log B - 2\log A = -2 \quad \Rightarrow \quad \log\dfrac{B}{A^2} = -2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{B}{A^2} = 10^{-2}$

$\Rightarrow \quad A^2 = B \cdot 10^2 \quad \Rightarrow \quad B$為完全平方數，設$B=k^2,\ \ k\in N$

但 $999 \geq B > 900$，$999 \geq k^2 > 900 \Rightarrow k^2 = 31^2$，即$B=31^2=961$，故$A=310$

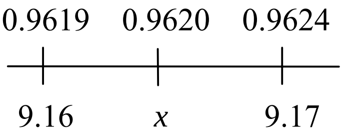
13.已知

x	5.45	1.07	7.58	9.16	9.17
$\log x$	0.7364	0.0294	0.8797	0.9619	0.9624

若$a=\sqrt[3]{\dfrac{(5.45)(10.7)}{75.8}}$ ，a之近似值至有效數字第四位為__________。（用內插法）
答案：0.9162
解析：

$\log a = \dfrac{1}{3}\log\dfrac{(5.45)(10.7)}{75.8} = \dfrac{1}{3}\log\dfrac{(5.45)(1.07)}{7.58} = \dfrac{1}{3}(\log5.45+\log1.07-\log7.58)$

$= \dfrac{1}{3}(0.7364+0.0294-0.8797) = \dfrac{1}{3}(-0.1139) \fallingdotseq -0.0380 = -1+0.9620$



$\dfrac{x-9.16}{9.17-9.16} = \dfrac{0.9620-0.9619}{0.9624-0.9619} \quad \Rightarrow \quad x = 9.162 \quad \therefore \quad a = 9.162\times10^{-1} = 0.9162$

14.假設定期存款的年利率為 2.6%，每半年為一期，複利計息。胡小姐存進 10000 元，言明定期 5 年。試利用常用對數表，求期滿後的本利和為__________元。
$(\log1.135 = 0.055\ ;\ \log1.013 = 0.0055)$
答案：11350
解析：

年利率$r = 2.6\% \Rightarrow$利率 $2.6\% \times \frac{1}{2} = 1.3\%$，期數$n = 10$，本金$P = 10000$ 元

5 年期滿後的本利和爲$10000(1+1.3\%)^{10} = 10000(1.013)^{10}$

設$x = (\ 1.013\ )^{10}$，$\log x = 10 \log 1.013 = 10 \times (0.0043 + 0.0012) = 0.055$

由已知知$x = 1.135$，本利和$10000(1+1.3\%)^{10} = 10000(1.013)^{10} = 10000 \times 1.135 = 11350$ 元

15.設 $100 < x < 1000$，若$\log\frac{1}{x}$的尾數與$\log x$尾數相同，求$x =$ ＿＿＿＿＿＿。

答案：$100\sqrt{10}$

解析：

$\log\frac{1}{x}$與$\log x$的尾數相等　∴　$\log x - \log\frac{1}{x}$是一正整數

$\Rightarrow \quad \log\frac{x}{\frac{1}{x}} = \log x^2 = n \in N \quad \Rightarrow \quad x^2 = 10^n$

又 $100 < x < 1000 \quad \Rightarrow \quad 10^4 < x^2 < 10^6 \quad \therefore \quad x^2 = 10^5 \quad \Rightarrow \quad x = 100\sqrt{10}$

16.設A，B均爲三位正整數且$B > 100$，若$\log B$之尾數爲$\log A$之尾數之 3 倍，則$A + B$之值 $=$ ＿。

答案：1000

解析：

設$\begin{cases} \log A = 2 + \frac{\alpha}{3} \\ \log B = 2 + \alpha \end{cases}$，$0 < \alpha < 1$

$3\log A - \log B = 4 \quad \Rightarrow \quad \log = \frac{A^3}{B} = 4 \quad \Rightarrow \quad A^3 = B \times 10^4$，

∴　設$B = 10^2 k^3$，$k \in N$，又 $100 < B \leq 999 \Rightarrow 100 < 10^2 \times k^3 \leq 999 \Rightarrow 1 < k^3 \leq 9.99$

取$k = 2$，得$B = 10^2 \times 2^3 = 800$，則$A = 10\sqrt[3]{10B} = 10\sqrt[3]{10 \times 800} = 200$，

故$A + B = 200 + 800 = 1000$

17.$a \in N$，若$\log a$的首數爲 2，則此種a共有＿＿＿＿＿＿個。

答案：900

解析：

$\log a$ 的首數爲 2　$\Rightarrow \quad 2 \leq \log a < 3 \quad \Rightarrow \quad \log 100 \leq \log a < \log 1000 \Rightarrow \quad 100 \leq a < 1000$

∵　$a \in N$　∴　此種 a 共 $1000 - 100 = 900$ 個

18.設$\log 2 = 0.3010$，$S = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{29}$，則(1) S爲＿＿＿位數。(2) S的最高位數字爲＿。

答案：(1) 10　(2) 1

解析：首項 1，公比 2，共 30 項，和$S = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{29} = \frac{1 \cdot (2^{30} - 1)}{2 - 1} = 2^{30} - 1$

$2^{30} - 1$ 與 2^{30}整數部分位數相同，$\log 2^{30} = 30 \log 2 = 30 \times 0.3010 = 9.03 = 9 + 0.03$

(1)首數爲 9　$\therefore$　2^{30}整數部分爲 10 位數，即$S = 2^{30} - 1$ 爲 10 位數

(2)尾數爲 0.03，$\log 1 = 0$，$\log 2 = 0.301$　$\Rightarrow$　$\log 1 < 0.03 < \log 2$

$\therefore$　S的最高位數字爲 1

19.設$\log x$的首數爲 1，$\log x$與$\log\dfrac{1}{x}$之尾數相同，則$x =$ ＿＿＿＿＿ 。

答案：10 或 $10\sqrt{10}$

解析：

$1 \le \log x < 2$　$\Rightarrow$　$2 \le 2\log x < 4$　$\therefore$　$\log x - \log\dfrac{1}{x} \in Z$　$\Rightarrow$　$\log x + \log x = 2\log x \in Z$

$\Rightarrow$　$2\log x = 2$ 或 3　$\Rightarrow$　$\log x = 1$ 或$\dfrac{3}{2}$　$\Rightarrow$　$x = 10$ 或 $10\sqrt{10}$

20.(1)設$S_n = 1 + \dfrac{3}{5} + (\dfrac{3}{5})^2 + \cdots + (\dfrac{3}{5})^{n-1}$，若$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$，則$S =$ ＿＿＿＿＿ 。

(2)承上題已知，若$|S_n - S| < 10^{-3}$，則n之最小值爲＿＿＿＿＿ 。

答案：(1)$\dfrac{5}{2}$　(2) 16

解析：

(1) $S = \dfrac{1}{1-\dfrac{3}{5}} = \dfrac{5}{2}$

(2) $S_n = \dfrac{1-(\frac{3}{5})^n}{1-\frac{3}{5}} = \dfrac{5}{2}[1-(\dfrac{3}{5})^n]$

$\therefore$　$|S_n - S| = \dfrac{5}{2}\cdot(\dfrac{3}{5})^n < 10^{-3}$　$\Rightarrow$　$\log 5 - \log 2 + n(\log 3 - \log 5) < -3$

$\Rightarrow$　$0.2219n > 3.398$　$\Rightarrow$　$n > \dfrac{3.398}{0.2219} \doteqdot 15.3$　$\therefore$　n之最小值爲 16

21.已知$\log 2 = 0.3010$，$\log 3 = 0.4771$，$\log 7 = 0.8451$，

(1)$(4.2)^{100}$是＿＿＿＿＿位數。　(2)$(\dfrac{6}{7})^{40}$在小數點以下第＿＿＿＿＿位數始不爲 0。

答案：(1)63　(2)3

解析：

$\log 2 = 0.3010$，$\log 3 = 0.4771$，$\log 7 = 0.8451$　$\Rightarrow$　$\log 5 = \log\dfrac{10}{2} = 1 - \log 2 = 0.6990$

(1)$\log(4.2)^{100} = 100\log 4.2 = 100\log\dfrac{21}{5}$

$= 100(\log 3 + \log 7 - \log 5) = 100(0.4771 + 0.8451 - 0.6990) = 62.32 = 62 + 0.32$

$\therefore$　$(4.2)^{100}$是 63 位數

(2)$\log(\frac{6}{7})^{40} = 40(\log 2 + \log 3 - \log 7) = 40(0.3010 + 0.4771 - 0.8451) = -2.68 = -3 + 0.32$

$\therefore$ $(\frac{6}{7})^{40}$在小數點以下第 3 位數始不爲 0

22.設$\log a$的首數與尾數爲二次方程式 $4x^2 - 7x + k = 0$ 的二個根，求a與k之值。

答案：$a = 10^{\frac{7}{4}}$；$k = 3$

解析：

(1) $\log a =$ 首數 $+$ 尾數 $= \frac{7}{4}$ $\therefore$ $a = 10^{\frac{7}{4}} = 10\sqrt[4]{1000}$

(2) $\log a = \frac{7}{4} = 1 + \frac{3}{4}$ $=$ 首數 $+$ 尾數 $\therefore$ 首數爲 1，尾數爲$\frac{3}{4}$

(3)兩根之積 $= 1 \times \frac{3}{4} = \frac{k}{4}$ $\Rightarrow$ $k = 3$