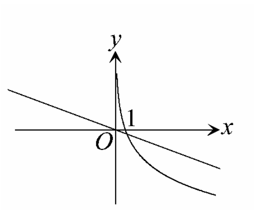
高雄市明誠中學　高一數學平時測驗　　日期：93.03.011					
範圍	1-4 對數函數+Ans	班級		姓名	
		座號			

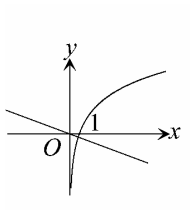
一、單選題(每題 10 分)

1.設 $0 < a < 1$，則下列哪一個選項，表示函數$y = \log_a x$與$y = (1 - a)x$的圖形？

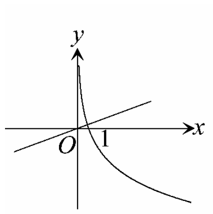
(A)



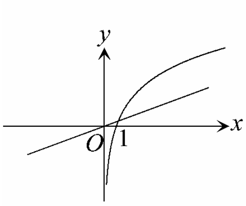
(B)



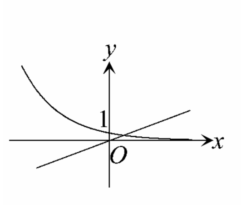
(C)



(D)



(E)



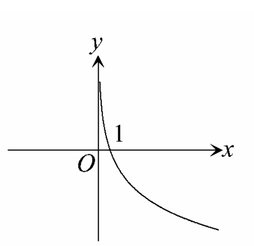
答案：(C)

解析：

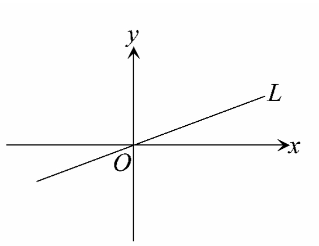
(1) $0 < a < 1$ 時，$y = \log_a x$圖形如圖(一)

(2)$\because$　$0 < a < 1$　$\Rightarrow$　$0 > -a > -1$　$\Rightarrow$　$1 > 1 - a > 0$　$\therefore$　$y = (1 - a)x$表過原點且斜率爲 $1 - a$之直線L，如圖(二)

(3)由(1)(2)　$\therefore$　選(C)



圖(一)



圖(二)

2.下列各值最小的是

(A) $\log_{\frac{1}{5}}3$　(B) $\log_{\frac{1}{3}}5$　(C) $\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{5}$　(D) $\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{3}$　(E) $\log_{\frac{1}{3}}1$

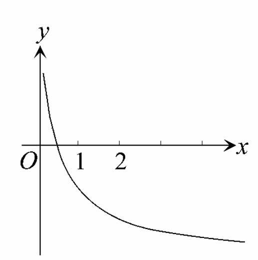
答案：(B)

解析：

$\log_{\frac{1}{5}}3 = -\log_5 3$，$\log_{\frac{1}{3}}5 = -\log_3 5$，$\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{5} = \log_3 5$，$\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{3} = \log_5 3$，$\log_{\frac{1}{3}}1 = 0$

$\therefore$　$\log_{\frac{1}{3}}5 < \log_{\frac{1}{5}}3 < \log_{\frac{1}{3}}1 < \log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{3} < \log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{5}$

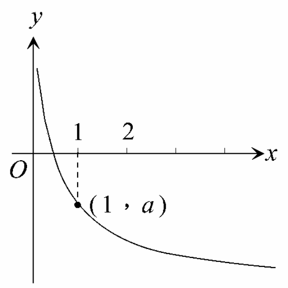
3.下圖爲函數$y = a + \log_b x$之部分圖形，其中a，b爲常數，則下列何者爲真？



(A) $a<0$，$b<1$　(B) $a>0$，$b>1$　(C) $a=0$，$b>1$　(D) $a>0$，$0<b<1$　(E) $a<0$，$0<b<1$

答案：(E)

解析：



圖形由左而右下降　$\therefore$　$0<b<1$

$x=1$ 時，$y=a+\log_{10}1=a$，$(1，a)$ 在x軸下方　$\therefore$　$a<0$

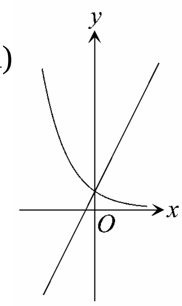
二、複選題(每題 10 分)

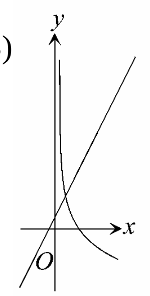
4.下列各函數之圖形何者與 $2x-y+1=0$ 恰有一交點？

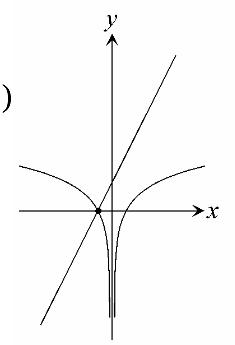
(A) $y=(\frac{1}{2})^x$　(B) $y=\log_{\frac{1}{2}}x$　(C) $y=\log_2|x|$　(D) $|y|=\log_2 x$　(E) $y=|\log_2 x|$

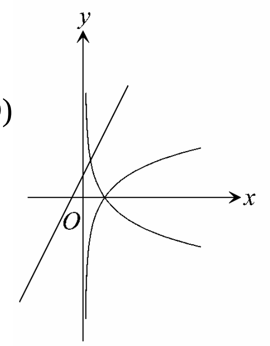
答案：(A)(B)(C)(D)(E)

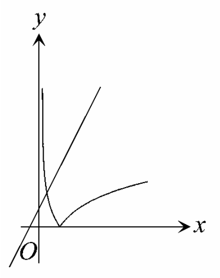
解析：

(A)


(B)


(C)


(D)


(E)


5.求下列敘述何者正確？

(A) $y=3^x$與$y=3^{-x}$的圖形對稱於y軸　(B) $y=\log_3 x$與$y=\log_{\frac{1}{3}}x$的圖形對稱於x軸

(C) $y=3^x$與$y=\log_3 x$的圖形對稱於y軸　(D) $y=3^{-x}$與$y=\log_{\frac{1}{3}}x$的圖形對稱於$x-y=0$　(E) $y=3^x$與$y=\log_3 x$的圖形相交於一點

答案：(A)(B)(D)

解析：

(A)將$(x，y)$用$(-x，y)$代入$y=3^{x}$，得$y=3^{-x}$　∴　$y=3^{x}$與$y=3^{-x}$兩圖形對稱y軸

(B)將$(x，y)$用$(x，-y)$代入$y=\log_3 x$，得$-y=\log_3 x$　⇒　$y=\log_3 x=\log_{\frac{1}{3}} x$

　∴　$y=\log_3 x$與$y=\log_{\frac{1}{3}} x$兩圖形對稱x軸

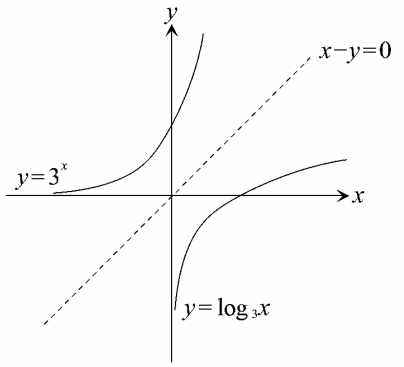
(C) $y=3^{x}$與$y=\log_3 x$互爲反函數　⇒　兩圖形對稱$x-y=0$，

　但不對稱y軸

(D) $y=3^{-x}=(\frac{1}{3})^{x}$與$y=\log_{\frac{1}{3}} x$互爲反函數　⇒　兩圖形對稱於

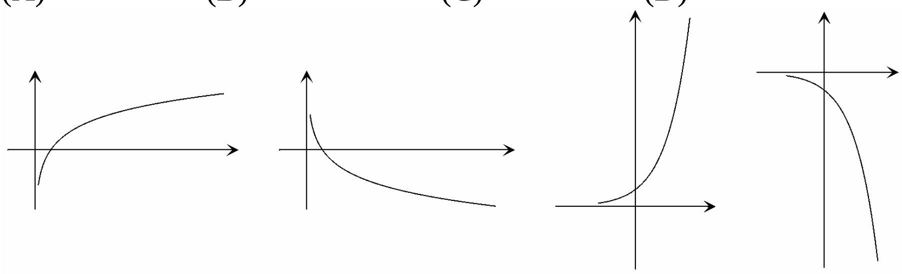
　$x-y=0$

(E)由右圖可知$y=3x$與$y=\log_3 x$不相交



6.若$a>0$，且$a\neq 1$，則下列各圖形中，何者可能是對數函數$y=\log_a x$的部分圖形？

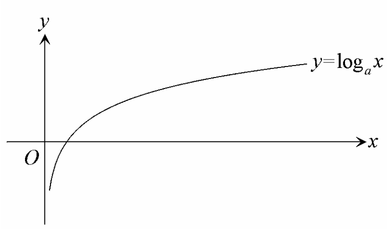
(A)　　(B)　　(C)　　(D)

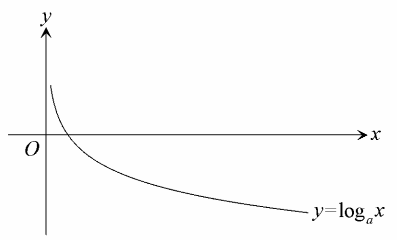


答案：(A)(B)

解析：

① $a>1$　　② $0<a<1$





$a>0$，$a\neq 1$ 時，$y=\log_a x$的圖形如上

∴　可能的對數函數$y=\log_a x$的部分圖形爲(A)(B)

7.下面有五組函數，哪些組的兩個函數，其圖形互相對稱於y軸？

(A) $y=(\frac{1}{2})^{3x}$和$y=2^{3x}$　(B) $y=2^{3x}$和$y=3^{2x}$　(C) $y=x^{2}$和$y=-x^{2}$

(D) $y=\log x$和$y=\log(-x)$　(E) $y=\log_3 x$和$y=\log_{\frac{1}{3}} x$

答案：(A)(D)

解析：

(1) $y=f(x)$有點$P(m，n)$　⇔　$n=f(m)$　⇔　$y=f(-x)$有點$Q(-m，n)$

　∴　$y=f(x)$與$y=f(-x)$的圖形對稱於y軸

(2) $y=(\frac{1}{2})^{3x} \xRightarrow{x\to -x\text{ 代}} y=(\frac{1}{2})^{3(-x)}=2^{3x}$ $\therefore$ $y=(\frac{1}{2})^{3x}$與 $y=2^{3x}$圖形對稱於y軸

$y=\log x \xRightarrow{x\to -x\text{ 代}} y=\log(-x)$ $\therefore$ $y=\log x$與$y=\log(-x)$圖形對稱於y軸

(3)$y=x^2$與$y=-x^2$圖形對稱於x軸，$y=\log_{\frac{1}{3}}x=-\log_3 x$與$y=\log_3 x$圖形對稱於$x$軸

三、填充題(每題 10 分)

1. 已知對所有實數x，$\log_2(x^2+x+a)$之值恆為正，求實數a的範圍為__________。

答案：$a>\frac{5}{4}$

解析：

$\log_2(x^2+x+a)$之值恆為正 $\Rightarrow$ $x^2+x+a>1$ $\Rightarrow$ $x^2+x+(a-1)>0$

$\Rightarrow$ $1^2-4(a-1)<0$ $\Rightarrow$ $a>\frac{5}{4}$

2. 解$\frac{1}{2}\log_{\sqrt{6}}(x^2-3x+2)<-1$，得__________。

答案：$-1<x<1$ 或 $2<x<4$

解析：

$\frac{1}{2}\log_{\sqrt{6}}(x^2-3x+2)<1$ $\Rightarrow$ $\log_6(x^2-3x+2)<1$

$\Rightarrow$ $0<x^2-3x+2<6$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}x^2-3x+2>0\\x^2-3x-4<0\end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}x<1\text{ 或 }x>2\\-1<x<4\end{cases}$

$\Rightarrow$ $-1<x<1$ 或 $2<x<4$

3. 解$\log_{\frac{1}{2}}(x-1)>\log_{\frac{1}{4}}(3-x)$，得__________。

答案：$1<x<2$

解析：

① $x-1>0$ $\Rightarrow$ $x>1$

② $3-x>0$ $\Rightarrow$ $x<3$

③ $\log_{\frac{1}{4}}(x-1)^2>\log_{\frac{1}{4}}(3-x)$ $\Rightarrow$ $(x-1)^2<3-x$ $\Rightarrow$ $x^2-x-2<0$ $\Rightarrow$ $-1<x<2$

綜合①②③得 $1<x<2$

4. 解不等式$\log_{\frac{1}{2}}(x-1)>\log_{\frac{1}{4}}(2x+1)$：__________。

答案：$1<x<4$

解析：

原式有意義 $\Rightarrow$ $\begin{cases}x-1>0\\2x+1>0\end{cases}$ $\therefore$ $x>1\cdots\cdots$①

原式化為$\log_{\frac{1}{2}}(x-1)>\log_{(\frac{1}{2})^2}(2x+1)$ $\Rightarrow$ $2\log_{\frac{1}{2}}(x-1)>\log_{\frac{1}{2}}(2x+1)$

$\Rightarrow$ $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)^2>\log_{\frac{1}{2}}(2x+1)$ $\Rightarrow$ $(x-1)^2<2x+1$ $\Rightarrow$ $x^2-4x<0$

$\Rightarrow$ $0<x<4\cdots\cdots$②

由①②得 $1<x<4$

5. 解$\log_{\frac{1}{2}}(\log_{\frac{1}{3}} x) > -1$，得__________。

答案：$\frac{1}{9} < x < 1$

解析：

$\log_{\frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{3}} x > -1 \quad \Rightarrow \quad 0 < \log_{\frac{1}{3}} x < (\frac{1}{2})^{-1} = 2 \quad \Rightarrow \quad (\frac{1}{3})^0 = 1 > x > (\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$，$\therefore \quad \frac{1}{9} < x < 1$

6. 解不等式：

(1) $\log_2(x-1) < 1 + \log_4(x+2)$之解爲__________。

(2) $\log_3(\log_{\frac{1}{2}} x) < 1$ 之解爲__________。

答案：(1) $1 < x < 7$　(2) $\frac{1}{8} < x < 1$

解析：

(1)$\because$　原式有意義　$\Rightarrow \begin{cases} x-1>0 \\ x+2>0 \end{cases} \Rightarrow \quad x > 1$……①

原式化爲$\log_2(x-1) < \log_2 2 + \frac{1}{2}\log_2(x+2)$

$\Rightarrow \quad x - 1 < 2\,(x+2)^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad (x-1)^2 < 4\,(x+2)$

$\Rightarrow \quad x^2 - 6x - 7 < 0 \quad \Rightarrow \quad (x+1)(x-7) < 0 \quad \Rightarrow \quad -1 < x < 7$……②

由①②得 $1 < x < 7$

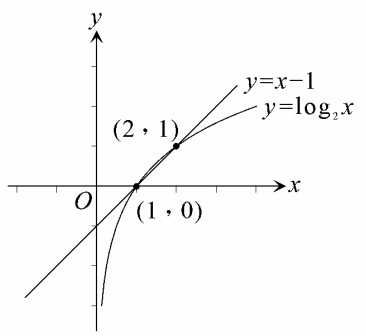
(2)$\log_3(\log_{\frac{1}{2}} x) < 1 \quad \Rightarrow \quad \log_3(\log_{\frac{1}{2}} x) < \log_3 3 \quad \Rightarrow \quad 0 < \log_{\frac{1}{2}} x < 3$

$\Rightarrow \quad \log_{\frac{1}{2}} 1 < \log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} (\frac{1}{2})^3 \quad \Rightarrow \quad 1 > x > \frac{1}{8}$

7. 設$x \in R$，則$\log_2 x = x - 1$ 有__________個實根。

答案：2

解析：$y = \log_2 x$與$y = x - 1$ 交於(1，0)與(2，1)，故$\log_2 x = x - 1$ 有二實根 1，2



8. 若不論x爲任何實數，$\log_{0.1}\{(k-1)x^2 + 2x + (k+1)\}$恆有意義，則實數$k$之範圍爲__________。

答案：$\{k \mid k > \sqrt{2}\}$

解析：

原式　$\Rightarrow \quad \forall\, x$，$(k-1)x^2 + 2x + (k+1) > 0$

① $k - 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad k > 1$

②$\triangle < 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - (k-1)(k+1) < 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - (k^2 - 1) < 0$

$\Rightarrow \quad k^2 > 2 \quad \Rightarrow \quad k < -\sqrt{2}$ 或$k > \sqrt{2}$

由①②得$\{k \mid k > \sqrt{2}\}$

9.不等式 $1 + \log_{\frac{1}{2}}(3x-1) > 0$ 之解爲__________。

答案：$\frac{1}{3}<x<1$

解析：

原式 $\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}+\log_{\frac{1}{2}}(3x-1)>\log_{\frac{1}{2}}1$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(3x-1)<1 \Rightarrow 3x-1<2 \Rightarrow x<1$……①

又 $3x-1>0 \Rightarrow x>\frac{1}{3}$……②

由①②知$\frac{1}{3}<x<1$

10.設$f(x)=\log_a(x-1)$的圖形過二點$A(3，1)$，$B(b，2)$，則數對$(a，b)=$__________。

答案：$(2，5)$

解析：

即$y=\log_a(x-1)$通過$A(3，1)$，$B(b，2)$

$\therefore \begin{cases}1=\log_a(3-1)\\2=\log_a(b-1)\end{cases} \therefore a=2，\log_2(b-1)=2 \quad \therefore b-1=2^2=4 \quad \therefore b=5$

11.比較下列$a，b，c，d，e$的大小：

(1) $a=(1.7)^{3.1}$，$b=(1.7)^{-2}$，$c=1$，$d=0$，$e=\sqrt[3]{1.7}$：__________。

(2) $a=\log_{0.6}2$，$b=\log_{0.6}\sqrt{0.6}$，$c=\log_{0.6}0.5$，$d=0$，$e=1$：__________。

答案：(1) $a>e>c>b>d$ (2) $c>e>b>d>a$

解析：

(1) $a=(1.7)^{3.1}$，$b=(1.7)^{-2}$，$c=1=(1.7)^0$，$d=0$，$e=(1.7)^{\frac{1}{3}}$

$\because 1.7>1 \quad \therefore a>e>c>b>d$

(2) $a=\log_{0.6}2<\log_{0.6}1=0$，$b=\log_{0.6}\sqrt{0.6}=\frac{1}{2}$，

$c=\log_{0.6}0.5>\log_{0.6}0.6=1$，$d=0$，$e=1$，$\therefore c>e>b>d>a$

12.不等式$\log_{\frac{1}{2}}(3x+1)>2$之解爲__________。

答案：$-\frac{1}{3}<x<-\frac{1}{4}$

解析：

原式有意義 $\Rightarrow 3x+1>0 \Rightarrow x>-\frac{1}{3}$

$\log_{\frac{1}{2}}(3x+1)>2 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}(3x+1)>\log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2})^2 \Rightarrow 3x+1<\frac{1}{4} \Rightarrow x<-\frac{1}{4}$

得 $-\frac{1}{3}<x<-\frac{1}{4}$

13.解不等式$\log_{0.1}(x^2-4)-\log_{0.1}(x+2)<0$，得__________。

答案：$x>3$

解析：

$\log_{0.1}(x^2-4)-\log_{0.1}(x+2)<0$，$\begin{cases} x^2-4>0 \\ x+2>0 \end{cases} \Rightarrow \quad x>2$

$\Rightarrow \quad \log_{0.1}\dfrac{x^2-4}{x+2}<\log_{0.1}1$

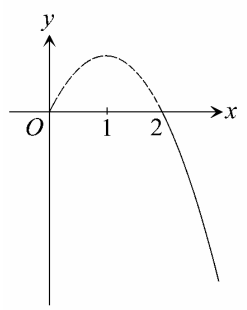
$\because \quad 0<0.1<1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x^2-4}{x+2}>1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{(x+2)(x-2)}{x+2}>1 \quad \Rightarrow \quad x-2>1 \quad \Rightarrow \quad x>3$

$\therefore \quad x>3$

14.$10^2\le x\le 10^3$，設$x^{2-\log x}$之最大值爲M，最小值爲m，則$(M，m)=$__________。

答案：$(1，\dfrac{1}{1000})$

解析：



$10^2\le x\le 10^3 \quad \Rightarrow \quad 2\le\log x\le 3$，令$y=x^{2-\log x}$

$\therefore \quad \log y=\log x^{2-\log x}=(2-\log x)\log x$

$=-(\log x)^2+2\log x=-(\log x-1)^2+1$

$\therefore \quad -3\le\log y\le 0 \quad \Rightarrow \quad 10^{-3}\le y\le 1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{1000}\le x^{2-\log x}\le 1$

15.設$1\le x\le 100$且$x^{1-\log x}$的最大值爲M，最小值爲m，則數對$(M，m)=$__

。

答案：$(\sqrt[4]{10}，\dfrac{1}{100})$

解析：

$1\le x\le 100 \quad \Rightarrow \quad 0\le\log x\le 2$，由$\log x^{1-\log x}=(1-\log x)\log x=-(\log x)^2+\log x$

$=-(\log x-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}\le\log x-\dfrac{1}{2}\le\dfrac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad 0\le(\log x-\dfrac{1}{2})^2\le\dfrac{9}{4}$

$\Rightarrow \quad 0\ge-(\log x-\dfrac{1}{2})^2\ge-\dfrac{9}{4}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{4}\ge-(\log x-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{1}{4}\ge-2$

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{4}\ge\log x^{1-\log x}\ge-2$

$\Rightarrow \quad \log 10^{\frac{1}{4}}\ge\log x^{1-\log x}\ge\log 10^{-2}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{100}\le x^{1-\log x}\le\sqrt[4]{10} \quad \therefore \quad M=\sqrt[4]{10}，m=\dfrac{1}{100}$

16.設$\dfrac{1}{4}\le x\le 8$，$f(x)=x^{2-\log_2 x}$之最大值爲__________。

答案：2

解析：

$f(x)=x^{2-\log_2 x} \quad \Rightarrow \quad \log_2 f(x)=\log_2 x^{2-\log_2 x}=(2-\log_2 x)\log_2 x$

令$\log_2 x=t \quad \Rightarrow \quad \log_2 f(x)=(2-t)t=-(t-1)^2+1$

$\because \quad \dfrac{1}{4}\le x\le 8 \quad \Rightarrow \quad -2\le\log_2 x\le 3$

$\Rightarrow \quad -2\le t\le 3 \quad \therefore \quad$ 當$t=1$時，$\log_2 f(x)$有最大值 $=1 \quad \Rightarrow \quad f(x)$之最大值 $=2$

17.若$f(x)=2\log(x-1)-\log(x-2)$，$x>2$，則當$x=$__________時，$f(x)$有最小值 $=$______。

答案：3；log4

解析：

$$f(x)=2\log(x-1)-\log(x-2)，x>2=\log(x-1)^2-\log(x-2)=\log\frac{(x-1)^2}{x-2}$$

$$\because\quad \frac{(x-1)^2}{x-2}=\frac{[(x-2)+1]^2}{x-2}=(x-2)+2+\frac{1}{(x-2)}\geq 2\sqrt{(x-2)\cdot\frac{1}{(x-2)}}+2=4\ (\because\ x>2)$$

$\therefore$ $f(x)$有最小值 $=\log4$，又「=」成立時，$x-2=\dfrac{1}{x-2}\Rightarrow (x-2)^2=1$

$\Rightarrow x-2=\pm1\Rightarrow x=3$ 或$x=1$（不合），故當$x=3$時，$f(x)$有最小值 $=\log4$

18.不等式$\log_{0.2}(x-3)\leq\log_{0.2}(5+4x-x^2)$之解爲__________。

答案：$\dfrac{3+\sqrt{41}}{2}\leq x<5$

解析：

(1)先決條件$\begin{cases}x-3>0\\5+4x-x^2>0\end{cases}\Rightarrow 3<x<5\cdots\cdots①$

(2) $\log_{0.2}(x-3)\leq\log_{0.2}(5+4x-x^2)$，$x-3\geq5+4x-x^2$（$\because$ $0<$ 底數 $=0.2<1$）

$x^2-3x-8\geq0\Rightarrow x\leq\dfrac{3-\sqrt{41}}{2}$ 或$x\geq\dfrac{3+\sqrt{41}}{2}\cdots\cdots②$

(3)① ∩ ② $\Rightarrow \dfrac{3+\sqrt{41}}{2}\leq x<5$

19.求不等式$\log_{\frac{1}{4}}(4-x)<1+\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$之解爲__________。

答案：$1<x<3$

解析：

$$\log_{\frac{1}{4}}(4-x)<1+\log_{\frac{1}{2}}(x-1)=\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{4}+\log_{\frac{1}{4}}(x-1)^2=\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{4}(x-1)^2$$

$$\Rightarrow\begin{cases}4-x>0\\x-1>0\\4-x>\frac{1}{4}(x-1)^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1<x<4 & \cdots\cdots①\\(x-1)^2<16-4x & \cdots\cdots②\end{cases}$$

由②得$x^2+2x-15<0\Rightarrow (x+5)(x-3)<0\Rightarrow -5<x<3\cdots\cdots③$

由①③得 $1<x<3$

20.試求不等式$\log_x(x^2-3x+2)<2$ 的解。

答案：$0<x<\dfrac{2}{3}$ 或 $2<x$

解析：

原式有意義：$\begin{cases}x^2-3x+2>0\Rightarrow x<1 或 2<x\\1\neq x>0\end{cases}$

$\therefore$ $0<x<1$ 或 $2<x$

(1)當 $0 < x < 1$ 時，$\log_x(x^2 - 3x + 2) < 2 = \log_x x^2$

$\Rightarrow \quad x^2 - 3x + 2 > x^2 \quad \Rightarrow \quad x < \dfrac{2}{3} \quad \therefore \quad 0 < x < \dfrac{2}{3}$

(2)當$x > 2$ 時，$\log_x(x^2 - 3x + 2) < \log_x x^2$

$\Rightarrow \quad x^2 - 3x + 2 < x^2 \quad \Rightarrow \quad x > \dfrac{2}{3} \quad \therefore \quad x > 2$

由(1)(2)知，$0 < x < \dfrac{2}{3}$ 或 $2 < x$

21.$f(x) = \log_2(3x^2 + 2x + 3) - \log_2(3x^2 - 2x + 3)$，則$f(x)$的最大值為$a$，最小值為$b$，$(a，b) =$__________。

答案：(1，－1)

解析：

$f(x) = \log\dfrac{3x^2+2x+3}{3x^2-2x+3}$，設$k = \dfrac{3x^2+2x+3}{3x^2-2x+3} \Rightarrow 3(k-1)x^2 - 2(k+1)x + 3(k-1) = 0$

$\because x \in R \Rightarrow \Delta = [2(k+1)]^2 - 4[3(k-1)]^2 \geq 0$

$(2k-1)(k-2) \leq 0 \Rightarrow \dfrac{1}{2} \leq k \leq 2$

$\therefore \; f(x) = \log_2(3x^2 + 2x + 3) - \log_2(3x^2 - 2x + 3) \;\Rightarrow f(x) = \log\dfrac{3x^2+2x+3}{3x^2-2x+3} = \log k$

$\because \dfrac{1}{2} \leq k \leq 2 \Rightarrow \log\dfrac{1}{2} \leq \log k \leq \log 2$，即$-1 \leq f(x) \leq 1$