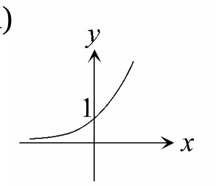
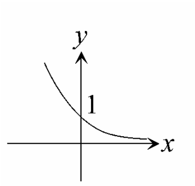
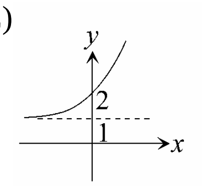
高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：93.02.26					
範圍	1-2 指數函數圖形+Ans	班級		姓名	
		座號			

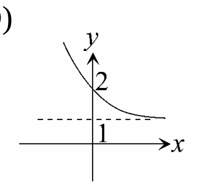
一. 單選題(每題 10 分)

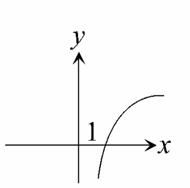
1.下列何者爲$y=1+(\frac{3}{5})^x$的部分圖形？

(A)


(B)


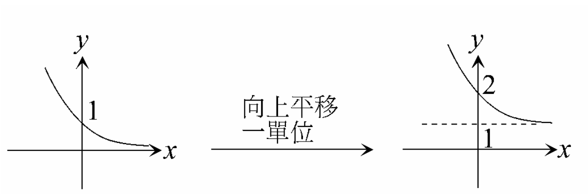
(C)


(D)


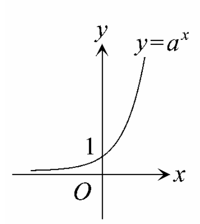
(E)


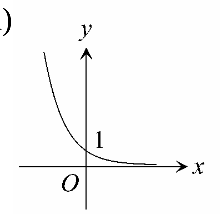
答案：(D)

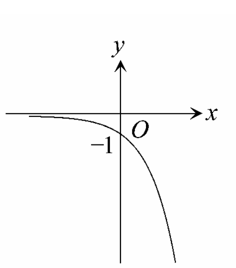
解析：先作出$y=(\frac{3}{5})^x$的圖形，再將此圖形向上平移一單位，即爲$y=1+(\frac{3}{5})^x$的圖形

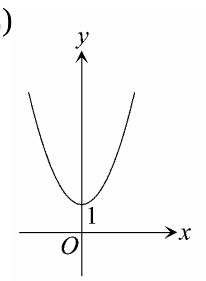


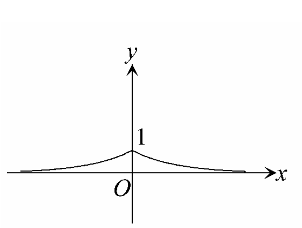
2.已知$y=a^x$的圖形如下圖，利用它可得$y=(\frac{1}{a})^{|x|}$之圖形爲

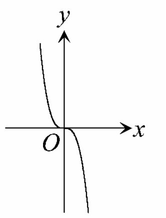


(A)


(B)


(C)


(D)


(E)


答案：(D)

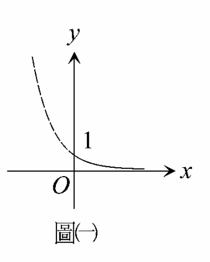
解析：

(1)$\because$ $y=a^x$圖形爲遞增的 $\therefore$ $a>1$ $\Rightarrow$ $0<\frac{1}{a}<1$

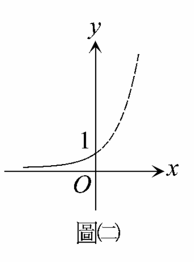
(2) (i)$x\geq 0$ 時，$y=(\frac{1}{a})^{|x|}=(\frac{1}{a})^x$，其圖形如下圖(一)

或(ii)$x<0$ 時，$y=(\frac{1}{a})^{|x|}=(\frac{1}{a})^{-x}=a^{x}$，其圖形如下圖(二)

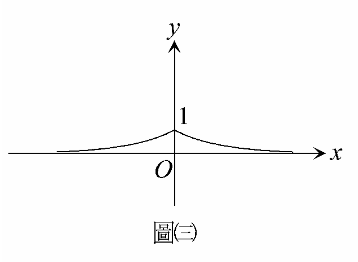
(3)$\therefore\quad y=(\frac{1}{a})^{|x|}$ 圖形如下圖(三)



圖(一)

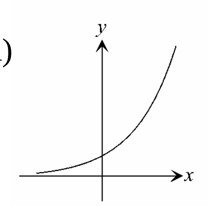
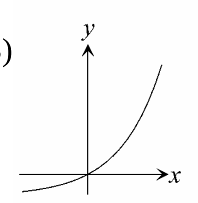
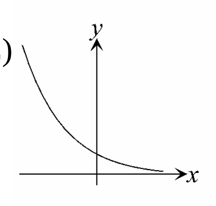
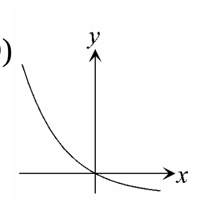


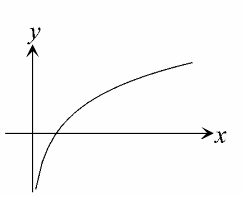
圖(二)



圖(三)

3.若$a>0$，$a\neq 1$，則下列各圖形中，何者可能是指數函數$y=a^{x}$的部分圖形？(複選)

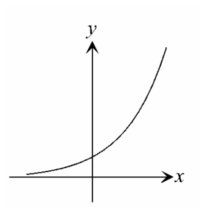
(A) 
(B) 
(C) 
(D) 

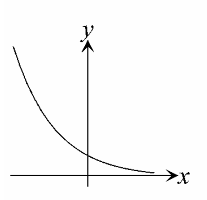
(E) 

答案：(A) (C)

解析：$x\in R\quad\Rightarrow\quad a^{x}>0\quad\therefore\quad y=a^{x}$圖形在$x$軸上方，且

(1) $a>1\Rightarrow$　　(2) $0<a<1$





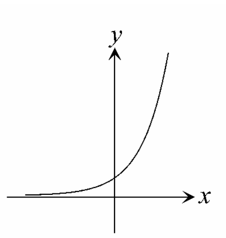
4.設$y=2^{x}$的圖形爲F，$y=0.5^{x}$的圖形爲G，下列何者正確？(複選)

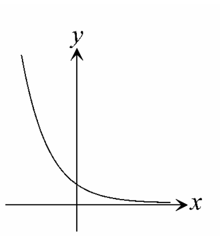
(A) F爲由左往右逐漸升高　(B) G爲由左往右逐漸升高　(C) F與G均以x軸爲漸近線　(D) G與$y=2^{-x}$之圖形一致　(E) G與$y=\pi$ 恰交於一點

答案：(A) (C) (D) (E)

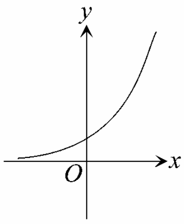
解析：

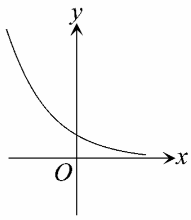
F：$y=2^{x}$　　G：$y=0.5^{x}=(\frac{1}{2})^{x}=2^{-x}$

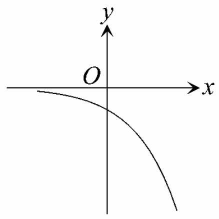


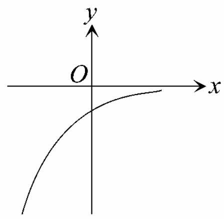


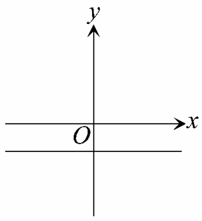
5.設$a>0$，函數$y=-a^x$之圖形可能為下列何者？(複選)

(A)


(B)


(C)


(D)


(E)


答案：(C) (E)

解析：(1) $a>1$，則 $y=-a^x$之圖形與$y=a^x$之圖形對稱於x軸選(C)

(2) $a=1$，則 $a^x=1$，即$y=-1$ 選(E)

二、填充題(每題 10 分)

1.$(0.5)^{x^2-5x+2}>4$ 之解為＿＿＿＿＿＿。

答案：$1<x<4$

解析：

$(0.5)^{x^2-5x+2}>4 \Rightarrow (0.5)^{x^2-5x+2}>(\frac{1}{2})^{-2}$

$\because 0<0.5<1 \Rightarrow x^2-5x+2<-2 \Rightarrow x^2-5x+4<0 \Rightarrow (x-1)(x-4)<0 \Rightarrow 1<x<4$

2.試比較 $2^{\frac{1}{2}}$，$3^{\frac{1}{3}}$，$5^{\frac{1}{5}}$之大小：＿＿＿＿＿＿。

答案：$3^{\frac{1}{3}}>2^{\frac{1}{2}}>5^{\frac{1}{5}}$

解析：

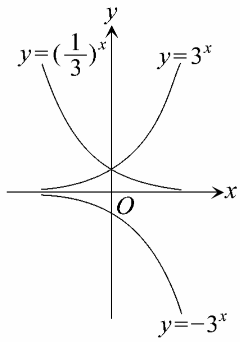
$(3^2)^{\frac{1}{6}}>(2^3)^{\frac{1}{6}} \Rightarrow 3^{\frac{1}{3}}>2^{\frac{1}{2}}$，又$(2^5)^{\frac{1}{10}}>(5^2)^{\frac{1}{10}} \Rightarrow 2^{\frac{1}{2}}>5^{\frac{1}{5}}$，故 $3^{\frac{1}{3}}>2^{\frac{1}{2}}>5^{\frac{1}{5}}$

3.設F表$y=3^x$的圖形，G表$y=(\frac{1}{3})^x$的圖形，H表$y=-3^x$的圖形，則(1) F與G對稱於直線＿＿＿＿＿＿。

(2) F與H對稱於直線＿＿＿＿＿＿。

答案：(1) y 軸 (2) x 軸

解析：如圖



4.若x，y，z均為正數，且 $2^x=3^y=5^z$，則 $2x$，$3y$，$5z$的大小關係為＿＿。

解析：

$\because\quad 2^x = 3^y \quad\Rightarrow\quad (2^x)^6 = (3^y)^6 \quad\Rightarrow\quad (2^3)^{2x} = (3^2)^{3y} \quad\Rightarrow\quad 8^{2x} = 9^{3y}$，$\because\quad 8 < 9 \quad\Rightarrow\quad 2x > 3y$

同理，$2^x = 5^z \quad\Rightarrow\quad (2^x)^{10} = (5^z)^{10} \quad\Rightarrow\quad (2^5)^{2x} = (5^2)^{5z} \quad\Rightarrow\quad 32^{2x} = 25^{5z}$

$\because\quad 32 > 25 \quad\Rightarrow\quad 2x < 5z \quad\therefore\quad 5z > 2x > 3y$

5.解不等式：

(1)不等式$(0.3)^{x^2-2x-1} > 0.09$之解爲__________。

(2)不等式 $27^x - 4\cdot 3^{2x-1} + 3^{x-1} < 0$ 之解爲__________。

答案：(1) $-1 < x < 3$　(2) $-1 < x < 0$

解析：

(1)原式　$\Rightarrow\quad (0.3)^{x^2-2x-1} > (0.3)^2$

$\Rightarrow\quad x^2 - 2x - 1 < 2 \quad\Rightarrow\quad x^2 - 2x - 3 < 0 \quad\Rightarrow\quad (x-3)(x+1) < 0 \quad\Rightarrow\quad -1 < x < 3$

(2)原式　$\Rightarrow\quad 3^{3x} - \dfrac{4}{3}\cdot 3^{2x} + \dfrac{1}{3}\cdot 3^x < 0 \quad\Rightarrow\quad 3\cdot 3^{3x} - 4\cdot 3^{2x} + 3^x < 0$

$\Rightarrow\quad 3^x(3^x - 1)(3\cdot 3^x - 1) < 0 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{1}{3} < 3^x < 1 \quad\Rightarrow\quad -1 < x < 0$

6.設$y = 9^x - 2\cdot 3^x$，$-2 \le x \le 2$，則

(1) y之最小值爲__________。　(2) y之最大值爲__________。

答案：(1) $y = -1$ 爲最小值；(2) $y = 63$ 爲最大值

解析：

$y = 9^x - 2\cdot 3^x = 3^{2x} - 2\cdot 3^x = (3^x - 1)^2 - 1 \quad\because\quad -2 \le x \le 2 \quad\therefore\quad \dfrac{1}{9} \le 3^x \le 9$

故(1)當$x = 0$，即 $3^x = 1$ 時，$y = -1$ 爲最小值，(2)當$x = 2$，即 $3^x = 9$ 時，$y = 63$ 爲最大值

7.不等式$(2^x - 8)(7^{-x} - 7^5) > 0$ 的解爲__________。

答案：$-5 < x < 3$

解析：$\because\quad (2^x - 8)(7^{-x} - 7^5) > 0$

①$2^x - 8 > 0$ 且 $7^{-x} - 7^5 > 0$ 時，$\therefore\quad 2^x > 2^3$且 $7^{-x} > 7^5$

$\Rightarrow\quad x > 3$ 且$-x > 5 \quad\Rightarrow\quad x > 3$ 且$x < -5$（不合）

或② $2^x - 8 < 0$ 且 $7^{-x} - 7^5 < 0$ 時，$\therefore\quad 2^x < 2^3$且 $7^{-x} < 7^5$

$\Rightarrow\quad x < 3$ 且$-x < 5 \quad\Rightarrow\quad -5 < x < 3$

8.不等式 $2^{1+2x} + 2^{1-2x} - 7(2^x + 2^{-x}) + 9 < 0$，則 $2^x + 2^{-x}$的範圍爲__________。

解析：令$t = 2^x + 2^{-x} \quad\because\quad 2^x + 2^{-x} \ge 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}} \quad\Rightarrow\quad t \ge 2$……①

又$t^2 = 2^{2x} + 2\cdot 2^x\cdot 2^{-x} + 2^{-2x} \quad\Rightarrow\quad 2^{2x} + 2^{-2x} = t^2 - 2$

原式：$2^{1+2x} + 2^{1-2x} - 7(2^x + 2^{-x}) + 9 < 0$ 可化爲

$2(2^{2x} + 2^{-2x}) - 7(2^x + 2^{-x}) + 9 < 0 \quad\Rightarrow\quad 2(t^2 - 2) - 7t + 9 < 0$

$\Rightarrow\quad 2t^2 - 7t + 5 < 0 \quad\Rightarrow\quad (2t - 5)(t - 1) < 0 \quad\therefore\quad 1 < t < \dfrac{5}{2}$……②

由①②知，$2 \le t \le \frac{5}{2}$，即 $2 \le 2^x + 2^{-x} < \frac{5}{2}$

9.設$f(x) = 2^{2x} + 2^x + 2^{-x} + 2^{-2x} + 2$，$x \in R$，求$f(x)$之最小值爲__________。

答案：6

解析：

令$t = 2^x + 2^{-x}$，則 $2^{2x} + 2^{-2x} = t^2 - 2$ 且$t \ge 2$

$f(x) = (2^{2x} + 2^{-2x}) + (2^x + 2^{-x}) + 2 \quad \Rightarrow \quad f(t) = (t^2 - 2) + t + 2 = (t + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$（$t \ge 2$）

當$t = 2$ 時，有最小值爲$(2 + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} = 6$

10.設$x > 0$，不等式$x^{x^2+3} > (x^2)^2$之解爲__________。

答案：$x > 0$ 且 $x \ne 1$

解析：

①$0 < x < 1$ 時，$x^2 + 3 < 4 \quad \Rightarrow \quad x^2 < 1 \quad \Rightarrow \quad -1 < x < 1 \quad \therefore \quad 0 < x < 1$

②$x = 1$ 時，$1 > 1$（$\rightarrow\leftarrow$）

③ $x > 1$ 時，$x^2 + 3 > 4 \quad \Rightarrow \quad x^2 > 1 \quad \Rightarrow \quad x < -1$ 或$x > 1 \quad \therefore \quad x > 1$

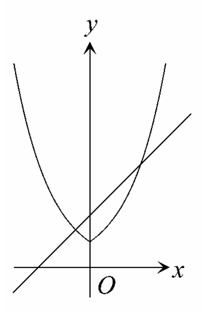
故得 $0 < x \ne 1$

11.方程式 $2^{|x|} - 2 = x$有__________個實根。

答案：2

解析：如圖

$2^{|x|} - 2 = x \quad \Rightarrow \quad 2^{|x|} = x + 2$ 實根數，即$\begin{cases} y = 2^{|x|} \\ y = x + 2 \end{cases}$二圖形交點數



12.不等式 2・$6^x - 3^x - 18$・$2^x + 9 < 0$ 之解爲__________。

解析：

2・$6^x - 3^x - 18$・$2^x + 9 < 0$

$2 \cdot 3^x \cdot 2^x - 3^x - 18 \cdot 2^x + 9 < 0$

設 $a = 3^x, b = 2^x \Rightarrow 2ab - a - 18b + 9 < 0$

$(2ab - a) - 9(2b - 1) < 0 \Rightarrow a(2b - 1) - 9(2b - 1) < 0$

$(2b - 1)(a - 9) < 0 \Rightarrow \quad (3^x - 9)(2 \cdot 2^x - 1) < 0$

$\Rightarrow \quad (3^x - 9)(2^{x+1} - 2^0) < 0 \quad \Rightarrow \quad (x - 2)(x + 1 - 0) < 0 \quad \Rightarrow \quad -1 < x < 2$