高雄市明誠中學　高一數學平時測驗					日期：93.02.25
範圍	1-1 指數 2+Ans	班級		姓名	
		座號			

一.　單選題(每題 10 分)

1.設 $a=(0.5)^{0.5}$，下列哪一項是正確的？

(A) $a<0.5$　(B) $0.5\le a<0.6$　(C) $0.6\le a<0.7$　(D) $0.7\le a<0.8$　(E) $a\ge 0.8$

答案：(D)

解析：$a=(0.5)^{0.5}=(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\sqrt{2}\doteqdot 1.4142$　∴　$a=\frac{1.4142}{2}=0.7071$

2.$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{2-\sqrt{3}}$ 之值為

(A) 1　(B) $2-\sqrt{3}$　(C) $2+\sqrt{3}$　(D) 0　(E) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

答案：(A)

解析：$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{2-\sqrt{3}}=(2+\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}\cdot(2-\sqrt{3})^{\frac{1}{3}}\cdot(2-\sqrt{3})^{\frac{1}{6}}$

$=(2+\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}\cdot(2-\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}=[(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})]^{\frac{1}{2}}=1$

二、填充題(每題 10 分)

1.設 $x+x^{-1}=\sqrt{31}$，則$[(x^2+x^{-2})^2-4(x+x^{-1})^2+12]^{\frac{1}{6}}$之值為__________。

答案：3

解析：

$x+x^{-1}=\sqrt{31}$　兩邊平方$\Rightarrow$　$x^2+2+x^{-2}=31$　$\Rightarrow$　$x^2+x^{-2}=29$

$[(x^2+x^{-2})^2-4(x+x^{-1})^2+12]^{\frac{1}{6}}=(29^2-4\times 31+12)^{\frac{1}{6}}=729^{\frac{1}{6}}=(3^6)^{\frac{1}{6}}=3$

2.設α、β為方程式 $9^x-5\cdot 3^x+27=0$ 之兩根，則$\alpha+\beta$之值為__________。

答案：3

解析：

令 $t=3^x$，原式　$\Rightarrow$　$t^2-5t+27=0$ 之二根 $t_1=3^{\alpha}$，$t_2=3^{\beta}$

$t_1\cdot t_2=27$　$\Rightarrow$　$3^{\alpha}\cdot 3^{\beta}=27$　$\Rightarrow$　$3^{\alpha+\beta}=3^3$　∴　$\alpha+\beta=3$

3.設 $abc\ne 0$ 且 $2^a=3^b=6^c$，求 $bc+ca-ab=$ __________。

答案：0

解析：$\begin{cases}2^a=6^c\\3^b=6^c\end{cases}$　$\Rightarrow$　$\begin{cases}2=6^{\frac{c}{a}}\\3=6^{\frac{c}{b}}\end{cases}$

$2\times 3=6^{\frac{c}{a}}\cdot 6^{\frac{c}{b}}$　$\Rightarrow$　$6=6^{\frac{c}{a}+\frac{c}{b}}$，即$\frac{c}{a}+\frac{c}{b}=1$　$\Rightarrow$　$bc+ac=ab$　∴　$bc+ca-ab=0$

4.假設某國家 40 年後人口將增爲目前的 2 倍，問 10 年後人口會是目前的＿＿＿＿＿倍。
（相同時間成長相同倍數）

答案：$2^{\frac{1}{4}}$

解析：設目前人口數爲 x 人，每隔 1 年人口數爲原來的 r 倍

1 年後人口數爲 xr 人，2 年後人口數爲 xr^2 人，…，40 年後人口數爲 xr^{40} 人

$\therefore\quad 2x = x \cdot r^{40} \quad\Rightarrow\quad r^{40} = 2 \quad\Rightarrow\quad r^{10} = 2^{\frac{1}{4}}$

則 10 年後人口數爲 $x \cdot r^{10} = x \cdot 2^{\frac{1}{4}}$ 人　$\therefore$　10 年後人口數爲目前的 $2^{\frac{1}{4}}$ 倍

5.設 $\sqrt[x]{16} = \sqrt[y]{2^{3y-5}}$，且 $3^{5x+6y} = 81^{xy}$，則數對$(x，y)$ =＿＿＿＿＿。

答案：(2，5)

解析：

$\sqrt[x]{16} = \sqrt[y]{2^{3y+5}} \quad\Rightarrow\quad 2^{\frac{4}{x}} = 2^{\frac{3y-5}{y}} \quad\Rightarrow\quad \frac{4}{x} = \frac{3y-5}{y} \quad\Rightarrow\quad 4y = x(3y-5)$……①

$3^{5x+6y} = 81^{xy} = 3^{4xy} \quad\Rightarrow\quad 4xy = 5x + 6y$……②

由① + ②：$xy = 2y$　$\because$　$xy \neq 0$　$\therefore$　$x = 2$，$y = 5$

6.若 $2^{0.6} = 1.516$，$2^{0.03} = 1.021$，則(1) $2^{1.63}$ =＿＿＿＿＿。　(2) $2^{-0.37}$ =＿＿＿＿＿。

答案：(1) 3.095672　(2) 0.773918

解析：

(1) $2^{1.63} = 2^{1+0.6+0.03} = 2^1 \cdot 2^{0.6} \cdot 2^{0.03} = 2 \times 1.516 \times 1.021 = 3.095672$

(2) $2^{-0.37} = 2^{0.63-1} = 2^{0.6+0.03-1} = 2^{0.6} \cdot 2^{0.03} \cdot 2^{-1} = (1.516 \times 1.021) \div 2 = 0.773918$

7.若 $n \in N$，則$[(3+2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^n]^2 - [(3+2\sqrt{2})^n - (3-2\sqrt{2})^n]^2$ =＿＿＿＿＿。

答案：4

解析：

原式 $= [(3+2\sqrt{2})^{2n} + 2 \cdot (3+2\sqrt{2})^n(3-2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^{2n}]$

$- [(3+2\sqrt{2})^{2n} - 2 \cdot (3+2\sqrt{2})^n \cdot (3-2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^{2n}] = 4(3+2\sqrt{2})^n(3-2\sqrt{2})^n = 4$

8.解方程式：

(1) $4^{x+1} - 5 \cdot 2^{x+2} + 16 = 0 \quad\Rightarrow\quad x$ =＿＿＿＿＿。

(2) $6^x - 4 \cdot 3^x - 3 \cdot 2^x + 12 = 0 \quad\Rightarrow\quad x$ =＿＿＿＿＿。

答案：$x = 2$ 或 1

解析：

(1)原式　$\Rightarrow\quad 4 \cdot (2^x)^2 - 20 \cdot 2^x + 16 = 0$

$\Rightarrow\quad (2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

$\Rightarrow\quad (2^x - 1)(2^x - 4) = 0 \quad\Rightarrow\quad 2^x = 1$ 或 $2^x = 4 \quad\Rightarrow\quad x = 0$ 或 2

(2)原式　$\Rightarrow\quad 2^x \cdot 3^x - 4 \cdot 3^x - 3 \cdot 2^x + 12 = 0$

$\Rightarrow\quad (2^x - 4)(3^x - 3) = 0 \quad\Rightarrow\quad 2^x = 4$ 或 $3^x = 3 \quad\Rightarrow\quad x = 2$ 或 1

9.若 $2^{0.6}=1.516$，$2^{0.03}=1.021$，則 $2^{1.54}$ 之近似值爲__________（至小數點後第二位）。

已知 $[(1.516)^2=2.298256$，$(1.516)^3=3.484156$，$(1.021)^2=1.042441$，$(1.021)^3=1.0643322]$

答案：2.91

解析：$2^{1.54}=\dfrac{2\times 2^{0.6}}{(2^{0.03})^2}=\dfrac{2\times 1.516}{(1.021)^2}=\dfrac{3.032}{1.042441}=2.90855=2.91$

10.解 $2(4^x+4^{-x})-9(2^x+2^{-x})+14=0$，得 $x=$__________。

答案：$x=0$，± 1

解析：

$t=2^x+2^{-x}\geq 2 \quad \therefore \quad t^2=4^x+2+4^{-x} \quad \Rightarrow \quad 4^x+4^{-x}=t^2-2$

$\therefore \quad 2(t^2-2)-9t+14=0 \quad \Rightarrow \quad 2t^2-9t+10=0 \quad \Rightarrow \quad (2t-5)(t-2)=0 \quad \Rightarrow \quad t=\dfrac{5}{2}$ 或 2

① $t=\dfrac{5}{2}$ 時，$2^x+2^{-x}=\dfrac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad x=\pm 1$，② $t=2$ 時，$2^x+2^{-x}=2 \quad \Rightarrow \quad x=0$，故得 $x=0$，± 1

11.設 x，y，z 是正數，$x^y=1$，$y^z=\dfrac{1}{2}$，$z^x=\dfrac{1}{3}$，則 xyz 之值爲__________。

答案：$xyz=\dfrac{1}{24}$

解析：

(1) $x^y=1$，$x>0$，$y>0 \quad \Rightarrow \quad x=1$

因爲 $\left(\begin{array}{l} ①若\ x>1 \quad \because \quad y>0 \quad \Rightarrow \quad x^y>x^0=1，不合 \\ ②若\ 0<x<1 \quad \because \quad y>0 \quad \Rightarrow \quad x^y<x^0=1，不合 \end{array}\right)$

(2) $z^x=\dfrac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad z=\dfrac{1}{3}$

(3) $y^x=\dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad y^{\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad y=\dfrac{1}{8}$

(4) $xyz=1(\dfrac{1}{3})(\dfrac{1}{8})=\dfrac{1}{24}$

12.假設某項實驗中，細菌數 1 日後增加 1 倍，若 10 日後細菌數爲 N，則 k 日後細菌數爲 $\dfrac{N}{8}$，則 $k=$__________。

答案：$k=7$

解析：

設實驗開始時，細菌數爲 m 個，則

10 日後，細菌數 $m\cdot 2^{10}=N$……①；

k 日後，細菌數 $m\cdot 2^k=\dfrac{N}{8}$……②

由$\dfrac{①}{②}$得 $2^{10-k}=8=2^3 \quad \Rightarrow \quad 10-k=3 \quad \Rightarrow \quad k=7$

13.設 $a^{2x}=3-2\sqrt{2}$ ，則(1) $a^{-x}=$__________。　(2) $\dfrac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^{x}+a^{-x}}=$__________。

答案：(1) $\sqrt{2}+1$　(2) 5

解析：

$$(1)\ a^{2x}=3-2\sqrt{2}=(\sqrt{2}-1)^2 \quad\Rightarrow\quad a^{x}=\sqrt{2}-1 \quad \therefore\quad a^{-x}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$$

$$(2)\ a^{2x}=3-2\sqrt{2} \quad\Rightarrow\quad a^{-2x}=\frac{1}{3-2\sqrt{2}}=3+2\sqrt{2}$$

$$\therefore\quad \frac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^{x}+a^{-x}}=\frac{(a^{x}+a^{-x})(a^{2x}-a^{x}\cdot a^{-x}+a^{-2x})}{a^{x}+a^{-x}}=6-1=5$$

14.指數不等式 $(0.125)^{x}<0.25<2^{-2x}$ 的解爲__________。

答案：$\dfrac{2}{3}<x<1$

解析：$(0.125)^{x}<0.25<2^{-2x}$

$$\Rightarrow\quad (\frac{1}{8})^{x}<\frac{1}{4}<2^{-2x}$$

$$\Rightarrow\quad 2^{-3x}<2^{-2}<2^{-2x}$$

$$\Rightarrow\quad -3x<-2<-2x$$

$$\Rightarrow\quad 1>x>\frac{2}{3}$$

15.設 $x>0$ ，且 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=6$ ，則 $x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}=$__________。

答案：198

解析：

$$(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2=x+2+x^{-1} \quad\Rightarrow\quad 6^2=x+x^{-1}+2 \quad\Rightarrow\quad x+x^{-1}=34$$

$$x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}=(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})(x-x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}+x^{-1})=6\times(34-1)=198$$

16.設 $57^{x}=8$ ，$513^{y}=16$ ，則 $\dfrac{3}{x}-\dfrac{4}{y}=$__________。

答案：$-2\log_2 3$

解析：

$$57^{x}=8=2^{3} \quad\Rightarrow\quad 57=2^{\frac{3}{x}}\cdots\cdots①\text{，}\ 513^{y}=16=2^{4} \quad\Rightarrow\quad 513=2^{\frac{4}{y}}\cdots\cdots②$$

$$\frac{①}{②}\ \text{得}\ 2^{\frac{3}{x}-\frac{4}{y}}=\frac{57}{513}=\frac{1}{9} \quad \therefore\quad \frac{3}{x}-\frac{4}{y}=\log_2\frac{1}{9}=\log_2 3^{-2}=-2\log_2 3$$