高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：92.11.19					
範圍	2-4 複數平面(2)	班級		姓名	
		座號			

一、 單選題 (每題 8 分)

1. 設 $1-i$為$x^2+ax+3-i=0$ 的一根，則a的值為何？
 (A) -3 (B) -2 (C) $-1-i$ (D) 2 (E) 3。。

ANS：(A)

解析：

$\because$ $1-i$為$x^2+ax+3-i=0$ 的一根

$\therefore$ $(1-i)^2+a(1-i)+3-i=0$

$\Rightarrow$ $1-2i+i^2+a-ai+3-i=0$

$\Rightarrow$ $1-2i-1+a-ai+3-i=0$

$\Rightarrow$ $(a+3)-(a+3)i=0+0i$

$\therefore$ $a+3=0$ $\Rightarrow$ $a=-3$

2. $(4-3i)(5+2i)=a+bi$, $\dfrac{5+2i}{4+3i}=c+di$ ，a, b, c, d 均為實數，則
 (A) $a=20$ (B) $b=7$ (C) $c=\dfrac{26}{25}$ (D) $d=\dfrac{-7}{5}$ (E) $25a=c$

ANS：(C)

解析：

$(4-3i)(5+2i)=26-7i \Rightarrow a=26, b=-7$

$\dfrac{5+2i}{4+3i}=\dfrac{26-7i}{25} \Rightarrow c=\dfrac{26}{25}, d=\dfrac{-7}{25}$

二、填充題 (每題 10 分)

1. 設$z=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ ，則 $1+z^{92}+\sqrt{2}\,z^{2003}=$ __________ 。

ANS： $-1+i$

解析：

$\because$ $z^2=(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}})^2=\dfrac{2i}{2}=i$，$\therefore$ $z^{92}=(z^2)^{46}=(i)^{46}=-1$

$z^{2003}=z^{2002}\cdot z=(z^2)^{1001}\cdot z=(i)^{1001}\cdot z=i\cdot z$

故 $1+z^{92}+\sqrt{2}\,z^{2003}=1-1+\sqrt{2}\cdot i\cdot \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}=-1+i$

2. $a>0$ ，則$\left|\dfrac{2\sqrt{3}(2-ai)}{(\sqrt{2}+i)(a-2i)}\right|=$ ______ 。

ANS：2

解析：$\left|\dfrac{2\sqrt{3}(2-ai)}{(\sqrt{2}+i)(a-2i)}\right|=\dfrac{2\sqrt{3}|2-ai|}{|\sqrt{2}+i||a-2i|}=\dfrac{2\sqrt{3}\sqrt{a^2+4}}{\sqrt{3}\sqrt{a^2+4}}=2$

3. $x, y \in \mathbf{R}$, $(x+yi)(4+3i)=1-2i$ ，則 $x=$________, $y=$_________。

ANS：$\dfrac{-2}{25}$, $\dfrac{11}{25}$

解析：$x+yi=\dfrac{1-2i}{4+3i}=\dfrac{(1-2i)(4-3i)}{25}=\dfrac{-2-11i}{25}$ $\therefore x=\dfrac{-2}{25}$, $y=\dfrac{-11}{25}$

4. k 爲實數，若方程式 $3x^2-(k+i)x+4-2i=0$ 有實根，則 k 值爲___________，另一虛根爲_________。

ANS：-8；$-\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}i$

解析：

設方程式之實根爲 α，則 $3\alpha^2-(k+i)\alpha+4-2i=0$

$\Rightarrow$ $(3\alpha^2-k\alpha+4)-(\alpha+2)i=0$

$\Rightarrow$ $\begin{cases}\alpha+2=0\\3\alpha^2-k\alpha+4=0\end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}\alpha=-2\\k=-8\end{cases}$

設另一根爲 β，則 $-2+\beta=\dfrac{-8+i}{3}$ $\Rightarrow$ $\beta=\dfrac{-8+i}{3}+2=\dfrac{-2+i}{3}=-\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}i$

5. 化簡 $\dfrac{13}{3+\sqrt{-4}}+\dfrac{25}{4-\sqrt{-9}}=$______。

ANS：$7+i$

解析：$\dfrac{13}{3+2i}+\dfrac{25}{4-3i}=(3-2i)+(4+3i)=7+i$

6. 設 a，$b\in R$ 且 $[(a+1)-4i]+[5+(b-2)i]=2+4i$，則 $\overline{a+bi}=$__________。

ANS：$-4-10i$

解析：

$[(a+1)-4i]+[5+(b-2)i]=2+5i$

$\Rightarrow$ $(a+1+5)+(-4+b-2)i=2+4i$

$\Rightarrow$ $(a+6)+(b-6)i=2+4i$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}a+6=2\\b-6=4\end{cases}$ $\therefore$ $\begin{cases}a=-4\\b=10\end{cases}$

$\therefore$ $\overline{a+bi}=\overline{-4+10i}=-4-10i$

7. 設 k 爲有理數，且任一有理數 m，恆使方程式 $x^2-3(m-1)x+2m^2+3k=0$ 之根爲有理數，則 $k=$__________。

ANS：-6

a，b，$c\in Q$，$a\neq 0$，則 $ax^2+bx+c=0$ 有有理根 $\Leftrightarrow$ $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\in Q$

$\Leftrightarrow$ $\sqrt{b^2-4ac}\in Q$ $\Leftrightarrow$ b^2-4ac 爲完全平方式

判別式 $\Rightarrow$ $[-3(m-1)]^2-4\cdot 1\cdot(2m^2+3k)$

$= 9(m-1)^2 - 4(2m^2+3k) = m^2 - 18m + (9-12k)$爲完全平方

$\therefore\ \ 9^2 - (9-12k) = 0$，則$k = -6$

8. (1)設 z 爲複數且 $z^2 = -8-6i$ ，則 $z =$_________________。

(2)求 $x^2-(4+2i)x+(11+10i)=0$ 之二根爲何？_________________。

ANS：$1-3i,\ \ -1+3i$

解析：(1) 設$z = a+bi$，a，$b \in R$

$\Rightarrow\ \ (a+bi)^2 = (a^2-b^2)+2abi = -8-6i\ \ \Rightarrow\ \ \begin{cases} a^2-b^2=-8 \cdots\cdots ① \\ 2ab=-6 \quad \cdots\cdots ② \end{cases}$

$\Rightarrow$ 又 $a^2+b^2=10$ …….③

$\Rightarrow$ 由①③ 得$a^2=1$，$b^2=9$

$\Rightarrow$ 由② $a=\pm 1$， $b=\mp 3$

$\Rightarrow\ \ z = 1-3i$或 $-1+3i$

(2) $x^2-(4+2i)x+(11+10i)=0$

$x^2-(4+2i)x+(2+i)^2 = -(11+10i)+(2+i)^2$

$[x-(2+i)]^2 = -8-6i$

$x-(2+i) = [-8-6i$ 之平方根$]$

$x-(2+i) = \pm(1-3i) \Rightarrow x = 3-2i$ 或 $1+4i$

9. 設 $z = \dfrac{(1+i)^2(4-3i)}{(2-i)^2}$ 則$|\,z\,|=$______。

ANS：2

解析：$|\,z\,| = \dfrac{|\,1+i\,|^2|\,4-3i\,|}{|\,2-i\,|^2} = \dfrac{(\sqrt{2})^2\times 5}{(\sqrt{5})^2} = 2$

10. 令 $z = \dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$,則 $z^{10}+z^{12}+\cdots+z^{50} =$____。

ANS：$-i$

解析：$z = \dfrac{1-i}{\sqrt{2}},\ z^2 = \dfrac{-2i}{2} = -i$

$(-i)^5+(-i)^6+\cdots+(-i)^{25} = \dfrac{(-i)^5[1-(-i)^{21}]}{1-(-i)} = \dfrac{(-i)(1+i)}{(1+i)} = -i$

11. 設α，β爲 $3x^2+7x+3=0$ 的二根，則$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2$之值爲__________。

ANS： $-\dfrac{13}{3}$

解析：

方程式之判別式$D = 49-4\times 3\times 3 > 0$，有相異實根，

$\alpha+\beta = -\dfrac{3}{7} < 0$，$\alpha\beta = \dfrac{3}{3} > 0$， $\alpha < 0$，$\beta < 0\ \ \Rightarrow\ \ \sqrt{\alpha}\ \sqrt{\beta} = -\sqrt{\alpha\beta}$

$\therefore\quad (\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=(\sqrt{\alpha})^2+2\sqrt{\alpha}\ \sqrt{\beta}+(\sqrt{\beta})^2$

$$=\alpha-2\sqrt{\alpha\beta}+\beta=-\frac{7}{3}-2\sqrt{1}=-\frac{13}{3}$$

12. 方程式$x^2+5x-3=0$的兩根爲m，n，則以$\frac{m}{n}$，$\frac{n}{m}$爲兩根的方程式爲__________。

ANS： $x^2+\frac{31}{3}x+1=0$

解析：

$x^2+5x-3=0$的兩根爲m，n，則$m+n=-5$，$mn=-3$

$\frac{m}{n}+\frac{n}{m}=\frac{m^2+n^2}{mn}=\frac{(m+n)^2-2mn}{mn}=\frac{(-5)^2-2(-3)}{-3}=-\frac{31}{3}$

$\frac{m}{n}\cdot\frac{n}{m}=1$

$\therefore$ 以$\frac{m}{n}$，$\frac{n}{m}$爲兩根的方程式爲$x^2+\frac{31}{3}x+1=0$