高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：92.11.13					
範圍	複數平面+Ans	班級		姓名	
		座號			

一、 單選題 (每題 8 分)

1. 設 a，$b \in C$，$\alpha \in R$，則 $\dfrac{3a-bi}{a\alpha-2bi}$ 之共軛複數為

(A) $\dfrac{3a+bi}{a\overline{\alpha}-2bi}$ (B) $\dfrac{3\overline{a}-\overline{b}i}{a\overline{\alpha}-2bi}$ (C) $\dfrac{3\overline{a}+\overline{b}i}{\alpha\overline{a}-2\overline{b}i}$ (D) $\dfrac{3\overline{a}+\overline{b}i}{\overline{\alpha}a+2\overline{b}i}$ (E) $\dfrac{3\overline{a}+\overline{b}i}{\alpha\overline{a}+2\overline{b}i}$ 。

ANS： (E)

解析：

$\overline{(\dfrac{3a-bi}{a\alpha-2bi})}=\dfrac{\overline{3a-bi}}{\overline{a\alpha-2bi}}=\dfrac{3\overline{a}-\overline{b}\,\overline{i}}{\overline{a}\,\overline{\alpha}-2\overline{b}\,\overline{i}}=\dfrac{3\overline{a}+\overline{b}i}{\alpha\overline{a}+2\overline{b}i}$ ∴ (E)為真

2. 以 $2+\sqrt{2}\,i$及 $2-\sqrt{2}\,i$為根作一個一元二次方程式為

(A) $x^2+4x-2=0$ (B) $x^2-2x-3=0$ (C) $x^2-4x+6=0$

(D) $x^2-2x-1=0$ (E) $x^2-4x+8=0$。

ANS：(C)

解析：∵ $(2+\sqrt{2}\,i)+(2-\sqrt{2}\,i)=4$，$(2+\sqrt{2}\,i)(2-\sqrt{2}\,i)=6$

∴ 以 $2+\sqrt{2}\,i$及 $2-\sqrt{2}\,i$為二根之二次方程式為$x^2-4x+6=0$

3. 下列各式何者正確？

(A) $\sqrt{6}=\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}$ (B) $\sqrt{-6}=-\sqrt{2}\times\sqrt{3}$ (C) $\sqrt{\dfrac{3}{-2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-2}}$ (D) $\sqrt{\dfrac{3}{-2}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-2}}$

ANS：(D)

解析：

(A) $\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}=\sqrt{2}i\times\sqrt{3}i=\sqrt{6}i^2=-\sqrt{6}$ ，故 $\sqrt{6}\neq\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}$

(B) $\sqrt{-6}=\sqrt{6}i$ ，$-\sqrt{2}\times\sqrt{3}=-\sqrt{6}$ ，故 $\sqrt{-6}\neq-\sqrt{2}\times\sqrt{3}$

(C) $\sqrt{\dfrac{3}{-2}}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}\,i$ ，$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}i}=\dfrac{\sqrt{3}\cdot i}{\sqrt{2}\cdot i^2}=\dfrac{\sqrt{3}i}{-\sqrt{2}}=-\sqrt{\dfrac{3}{2}}\,i$

(D)由(C)可知 $\sqrt{\dfrac{3}{-2}}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}\,i$ ，$-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-2}}=-(-\sqrt{\dfrac{3}{2}}\,i)=\sqrt{\dfrac{3}{2}}\,i$ ，故 $\sqrt{\dfrac{3}{-2}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-2}}$

二、填充題 (每題 10 分)

1. 化簡$(1-i)^{100}=$__________ 。

ANS：-2^{50}

解析：(1) $(1-i)^2=1-2i+i^2=-2i$

(2) $(1-i)^{100}=[(1-i)^2]^{50}=(-2i)^{50}=2^{50}\cdot i^{50}=2^{50}\,(i^2)=-2^{50}$

2. 設$z=\dfrac{(5-12i)\cdot(7+2i)}{(2-7i)\cdot(3+4i)}$ ，則 $|z|=$__________ 。

ANS： $\dfrac{13}{5}$

解析：

(1)若α，$\beta \in C$，$\beta \neq 0$，則 $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$，$|\dfrac{\alpha}{\beta}| = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$

(2)$\therefore \quad |z| = |\dfrac{(5-12i)\cdot(7+2i)}{(2-7i)\cdot(3+4i)}| = \dfrac{|5-12i|\cdot|7+2i|}{|2-7i|\cdot|3+4i|} = \dfrac{\sqrt{5^2+12^2}\cdot\sqrt{7^2+2^2}}{\sqrt{2^2+7^2}\cdot\sqrt{3^2+4^2}} = \dfrac{13\cdot\sqrt{53}}{\sqrt{53}\cdot 5} = \dfrac{13}{5}$

3. x，$y \in R$，若$\dfrac{1+3i}{x+yi} = 1+i$，則數對$(x，y) =$ ＿＿＿＿＿＿ 。

ANS：(2，1)

解析：

$\because \quad \dfrac{1+3i}{x+yi} = 1+i$； $\therefore \quad x+yi = \dfrac{1+3i}{1+i} = \dfrac{(1+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{4+2i}{2} = 2+i$

$\because \quad x，y \in R \quad \therefore \quad x = 2，y = 1$

4. 若$(2-i)x^2 - 3(1-i)x - 2(1+i) = 0$ 有實數解，求另一虛根為＿＿＿＿＿＿ 。

ANS：$-\dfrac{1}{5} - \dfrac{3}{5}i$

解析：

設方程式之實根為α，則$(2-i)\alpha^2 - 3(1-i)\alpha - 2(1+i) = 0$

$\Rightarrow \quad (2\alpha^2 - 3\alpha - 2) + (-\alpha^2 + 3\alpha - 2)i = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha^2 - 3\alpha - 2 = 0 \\ \alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2\alpha+1)(\alpha-2) = 0 \\ (\alpha-1)(\alpha-2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\dfrac{1}{2}\text{或}2 \\ \alpha = 1\text{或}2 \end{cases} \quad \therefore \quad \alpha = 2$

設另一根為β，則 $2+\beta = \dfrac{3(1-i)}{2-i} = \dfrac{3}{5}(3-i) \Rightarrow \quad \beta = \dfrac{3}{5}(3-i) - 2 = \dfrac{-1-3i}{5}$

5. 設$z = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ ，則 $1 + z^{88} + \sqrt{2}\,z^{1999} =$ ＿＿＿＿＿＿ 。

ANS：$3-i$

解析：

$\because \quad z^2 = (\dfrac{1+i}{\sqrt{2}})^2 = \dfrac{2i}{2} = i \qquad \therefore \quad z^{88} = (z^2)^{44} = 1$

$z^{1999} = z^{1998} \cdot z = (z^2)^{999} \cdot z = (i)^{999} \cdot z = i^{996} \cdot i^3 \cdot z \quad = (i^4)^{249} \cdot (-i)z = -iz$

故 $1 + z^{88} + \sqrt{2}\,z^{1999} = 1 + 1 + \sqrt{2}(-i) \cdot \dfrac{1+i}{\sqrt{2}} = 2 - i(1+i) = 2 - i + 1 = 3 - i$

7. 設$i = \sqrt{-1}$ ，則$\dfrac{5i^5 + 4i^3 + 1}{8i^9 - 5i - 3}$的絕對值為＿＿＿＿＿＿ 。

ANS：$\dfrac{1}{3}$

解析：

$\because \quad \dfrac{5i^5+4i^3+1}{8i^9-5i-3}=\dfrac{5i-4i+1}{8i-5i-3}=\dfrac{i+1}{3i-3}$

$\therefore \quad \left|\dfrac{5i^5+4i^3+1}{8i^9-5i-3}\right|=\left|\dfrac{i+1}{3i-3}\right|=\dfrac{|i+1|}{|3i-3|}=\dfrac{\sqrt{1^2+1^2}}{\sqrt{3^2+(-3)^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}=\dfrac{1}{3}$

8. 化簡 $\dfrac{(3-\sqrt{-16})\cdot(-1+\sqrt{-25})}{2+\sqrt{-9}}$ 爲標準式得__________。

ANS：$7-i$

解析：

$\dfrac{(3-\sqrt{-16})\cdot(-1+\sqrt{-25})}{2+\sqrt{-9}}=\dfrac{(3-4i)(-1+5i)}{2+3i}$

$=\dfrac{(-3+20)+(4+15)i}{2+3i}=\dfrac{17+19i}{2+3i}=\dfrac{(17+19i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}=\dfrac{(34+57)+(38-51)i}{4+9}=\dfrac{91-13i}{13}=7-i$

9. 設 a，$b\in R$ 且 $[(a+1)-4i]+[5+(b-2)i]=2+5i$，則 $\overline{a+bi}=$__________。

ANS：$-4-11\,i$

解析：

$[(a+1)-4i]+[5+(b-2)i]=2+5i$

$\Rightarrow \quad (a+1+5)+(-4+b-2)i=2+5i$

$\Rightarrow \quad (a+6)+(b-6)\,i=2+5i \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a+6=2 \\ b-6=5 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} a=-4 \\ b=11 \end{cases}$

$\therefore \quad \overline{a+bi}=\overline{-4+11\,i}=-4-11i$

10. 設 α，β 爲方程式 $x^2+8x+4=0$ 的兩根，則以 $\alpha+\beta$ 及 $\alpha\beta$ 爲兩根的二次方程式爲________；而 $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2$ 之值爲__________。

ANS：$x^2+4x-32=0$；-12

解析：

α，β 爲 $x^2+8x+4=0$ 的兩根

$\therefore \quad \alpha+\beta=-8$，$\alpha\beta=4$，$(\alpha+\beta)+\alpha\beta=-4$，$(\alpha+\beta)(\alpha\beta)=-32$

$\therefore$ 以 $\alpha+\beta$，$\alpha\beta$ 爲兩根的二次方程式爲

$x^2-[(\alpha+\beta)+\alpha\beta]x+(\alpha+\beta)(\alpha\beta)=0$ 即 $x^2+4x-32=0$

又 $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\alpha+2\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}+\beta$

$=\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta}$（$\because \quad \alpha<0$，$\beta<0$）

$=-8-2\sqrt{4}=-12$

11. 設 k 爲給定之有理數，且對任一有理數 m，恆使方程式 $x^2-3(m-1)x+2m^2+3k=0$ 之根爲有理數，則 $k=$__________。

ANS：-6

解析：

判別式　$[-3(m-1)]^2-4\cdot1\cdot(2m^2+3k)$

$=9(m-1)^2-4(2m^2+3k)=m^2-18m+(9-12k)$爲完全平方

$\therefore$　$9^2-(9-12k)=0$，則$k=-6$

12. 設$\overline{\left(\dfrac{7+2i}{5-3i}\right)}=a+bi$，其中$a$，$b$爲實數，試求有序數對$(a，b)=$____________。

ANS：$\left(\dfrac{29}{34}，\dfrac{-31}{34}\right)$

解析：

$$\overline{\left(\frac{7+2i}{5-3i}\right)}=\frac{\overline{7+2i}}{\overline{5-3i}}=\frac{7-2i}{5+3i}=\frac{(7-2i)(5-3i)}{(5+3i)(5-3i)}=\frac{29-31i}{34}=\frac{29}{34}+\frac{-31}{34}i$$

$\therefore$　$(a，b)=\left(\dfrac{29}{34}，\dfrac{-31}{34}\right)$

13. 設複數z滿足$z^2=5-12i$，則此複數$z=$____________。

ANS：$3-2i$ 或 $-3+2i$

解析：

設$z=a+bi$，a，$b\in R$

$\Rightarrow$　$(a+bi)^2=(a^2-b^2)+2abi=5-12i$　$\Rightarrow$　$\begin{cases}a^2-b^2=5\cdots\cdots①\\2ab=-12\ \cdots\cdots②\end{cases}$

$\Rightarrow$　又 $a^2+b^2=13$…….③

$\Rightarrow$　由①③ 得$a^2=9$，$b^2=9$

$\Rightarrow$　由② $a=\pm3$，$b=\mp2$

$\therefore$　$(a，b)=(3，-2)$或$(-3，2)$　$\Rightarrow$　$z=3-2i$或 $-3+2i$

14. 求方程式$x^2-5x+(7-i)=0$ 之解。

ANS：$x=3+i$ 或 $x=2-i$

解析：

$x^2-5x+(7-i)=0$

$\Rightarrow[x^2-5x+(\frac{5}{2})^2]=-7+i+(\frac{5}{2})^2$

$\Rightarrow(x-\frac{5}{2})^2=\dfrac{-3+4i}{4}$

設$\omega^2=-3+4i$得　$\omega=\pm(1+2i)$　(參閱上題)

$\Rightarrow x-\dfrac{5}{2}=\dfrac{\pm(1+2i)}{2}\Rightarrow$　$x=3+i$或$x=2-i$

15. 甲、乙兩生同解一整係數方程式，甲生看錯x^2之係數得二根爲 $\dfrac{5}{4}$ 與 $-\dfrac{3}{10}$，乙生用公式解，判別式計算錯誤得二根爲 $\dfrac{13}{12}$與 $-\dfrac{7}{24}$，試求正確的方程式。

ANS：$48x^2-38x-15=0$

解析：

設正確方程式爲$ax^2+bx+c=0$，其二根爲α，β

則$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$，$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\dfrac{b}{c}$

(1)$\because$ 甲生看錯x^2之係數a但b，c沒錯

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=\dfrac{5}{4}+(-\dfrac{3}{10})=\dfrac{25-6}{20}=\dfrac{19}{20}\\ \alpha\beta=\dfrac{5}{4}\cdot(-\dfrac{3}{10})=-\dfrac{3}{8}\end{cases}\quad\because\quad\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\frac{b}{c}$$

$$\therefore\quad\frac{19/20}{-3/8}=-\frac{b}{c}\quad\Rightarrow\quad\frac{38}{15}=\frac{b}{c}\cdots\cdots①$$

(2)$\because$ 乙生判別式D計算錯誤

$\alpha+\beta=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}+\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}=-\dfrac{b}{a}$ 仍然正確

$\therefore$ 由$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$得$\dfrac{13}{12}+(-\dfrac{7}{24})=-\dfrac{b}{a}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{19}{24}=-\dfrac{b}{a}\cdots\cdots②$

(3)由①，② $a:b:c=48:(-38):(-15)$ 代入$ax^2+bx+c=0$

$48x^2-38x-15=0$ 爲所求方程式

16. 設$x\in R$，$i\,(x-i)^3\in R$，求x。

ANS：0，$\pm\sqrt{3}$

解析：

$\because$ $i\,(x-i)^3=i\,[x^3-3x^2\,(i)+3x(i^2)-i^3\,]=(3x^2-1)+(x^3-3x)i\in R$

$\therefore$ $x^3-3x=0$ $\therefore$ $x\,(x^2-3)=0$ $\therefore$ $x=0$ 或 $x=\pm\sqrt{3}$

17. α，β爲$x^2+6x+1=0$ 之二根，求$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=$？

ANS：-8

解析：

由根與係數關係知$\begin{cases}\alpha+\beta=-6\\ \alpha\beta=1\end{cases}$

$\because$ $\alpha+\beta<0$，$\alpha\beta>0$，α，$\beta\in R$

$\therefore$ $\alpha<0$，$\beta<0$ $\Rightarrow$ $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}=-\sqrt{\alpha\beta}$

$\Rightarrow$ $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\alpha+2\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}+\beta=\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta}=-6-2=-8$