高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：92.10.08					
範圍	整數+ans	班級		姓名	
		座號			

一、選擇題 (每題 5 分)

1. 下列那些是 3 的倍數？

(A) 7231×251 (B) 216^3+712^3 (C) 124^3-214^3 (D) 93275 (E) $3^{1999}+1$

Ans： (C)

解析：

(A)$\because$ 7231 與 251 皆不是 3 的倍數 $\therefore$ 7231×251 不是 3 的倍數

(B)$\because$ 216^3爲 3 的倍數，712^3不是 3 的倍數 $\therefore$ 216^3+721^3不是 3 的倍數

(C) $124^3-214^3=(124-214)(124^2+124\times 214+214^2)=-90\times 87708$ $\therefore$ 爲 3 的倍數

(D)$\because$ $9+3+2+7+5=26$ 不是 3 的倍數 $\therefore$ 93275 不是 3 的倍數

(E)$\because$ 3^{1999}是 3 的倍數，1 不是 3 的倍數 $\therefore$ $3^{1999}+1$ 不是 3 的倍數

2. 下列各數，何者爲質數？(A) 667 (B) 677 (C) 687 (D) 767 (E) 1547

Ans： (B)

解析：

(A) $667=23\times 29$，故爲合成數

(B) $p^2\le 677$ 的質數p有 2，3，5，7，11，13，17，19，23 分別去除 677，皆不能整除，故 677 爲質數

(C) $687=3\times 229$，故爲合成數

(D) $767=13\times 59$，故爲合成數

(E) $1547=7\times 13\times 17$，故爲合成數

3. 已知六位數 $3ab548$ 爲 99 之倍數，則 $a+2b=$(A) 10 (B) 9 (C) 8 (D) 7 (E) 6

Ans： (C)

解析：

$3ab548$ 爲 99 的倍數 $\therefore$ $3ab548$ 爲 9 的倍數亦爲 11 的倍數

$\because$ $3ab548$ 爲 9 的倍數 $\therefore$ $9\mid 3+a+b+5+4+8$

$\Rightarrow$ $9\mid a+b+20$ $\Rightarrow$ $9\mid a+b+2$ $\Rightarrow$ $a+b=7$ 或 16……①

又 $3ab548$ 爲 11 的倍數 $\therefore$ $11\mid 3-a+b-5+4-8$

$\Rightarrow$ $11\mid b-a-6$ $\Rightarrow$ $b-a=6$ 或-5……②

由①②知$\begin{cases}a+b=7\\b-a=6\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a+b=7\\b-a=-5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a+b=16\\b-a=6\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a+b=16\\b-a=-5\end{cases}$

則由第二組知 $a=6$，$b=1$ $\Rightarrow$ $a+2b=6+2=8$

4. 設 m，$n\in N$ 且 $m>1$，若 $m\mid(35n+26)$，$m\mid(7n+3)$，則 $m=$

(A) 5 (B) 7 (C) 11 (D) 13 (E) 17

Ans： (C)

解析：

$m\mid(35n+26)$且 $m\mid(7n+3)$ $\Rightarrow$ $m\mid(35n+26)-5(7n+3)=11$，又 $m>1$ $\therefore$ $m=11$

5. 李家三兄弟寄宿在外，大哥每 5 天回家一次，二哥每 7 天回家一次，三弟每 15 天回家一次；已知今年（1999 年）的五月九日（母親節）同時回家相聚後，三兄弟下一次再度同時回家相聚的時間是今年的

(A) 8 月 8 日 (B) 8 月 20 日 (C) 8 月 21 日 (D) 8 月 22 日 (E) 8 月 23 日

Ans： (D)

解析：

$\because$ $[5，7，15]=105$ $\therefore$ 三兄弟每次同時回家相隔 105 天

而 5 月 10 日至 5 月 31 日有 22 天，6 月有 30 天

7 月有 31 天，8 月有 31 天，

$\therefore$ 由 5 月 10 日到 8 月 22 日共有 $22+30+31+22=105$ 天

$\therefore$ 下次返家時間爲 8 月 22 日

二、填充題：(每題 10 分)

1. (1) $a，b\in N$且$(2a+b)(a-b)=8$，求$a=$__________，$b=$__________。

(2) $a\in Z$，若a^4-6a^2+25 爲質數，則$a=$__________。

(3) 設$p=(a^2-22a+121)(a^2-2a+69)$，若$a\in N$，且$p$爲一質數，則$a=$__________。

(4) 設$n\in N$，若 $6n^2-19n+10$ 爲質數，求n之值=__________。

Ans： (1) $a=3，b=2$ (2) ± 2 (3) 10 (4) 3

解析：

(1) $a，b\in N，(2a+b)(a-b)=8$

$2a+b$	1	2	4	8
$a-b$	8	4	2	1

，

a	3	2	2	3
b	-5	-2	0	2

$\Rightarrow$ $a=3，b=2$

(2)令$p=a^4-6a^2+25=a^4+10a^2+25-16a^2$

$=(a^2+5)^2-(4a)^2=(a^2+5-4a)(a^2+5+4a)$

$\Rightarrow$ ① $a^2+5-4a=1$ $\Rightarrow$ $a^2-4a+4=0，(a-2)^2=0，a=2$

或 ② $a^2+5+4a=1$ $\Rightarrow$ $a^2+4a+4=0，(a+2)^2=0，a=-2$

$\therefore$ $a=\pm 2$

(3)$\because$ $p=(a^2-22a+121)(a^2-2a+69)$爲質數

$\therefore$ $a^2-22a+121=1$ 或$a^2-2a+69=1$

$\Rightarrow$ $a^2-22a+120=0$ 或$a^2-2a+68=0$

$\Rightarrow$ $(a-10)(a-12)=0$ 或$a=1\pm\sqrt{67}\,i\notin N$

$\therefore$ $a=10$ 或 12

①若$a=10$，則$p=a^2-2a+69=100-20+69=149$ 爲質數

②若$a=12$，則$p=a^2-2a+69=144-24+69=189=7\times 27$ 不爲質數，$\therefore$ $a=10$

(4)$\because$ $6n^2-19n+10=(3n-2)(2n-5)$爲質數

$\therefore$ $3n-2=1$ 或 $2n-5=1$ $\Rightarrow$ $n=1$ 或$n=3$

當$n = 1$時，$6n^2 - 19n + 10 = -3$不爲質數
當$n = 3$時，$6n^2 - 19n + 10 = 7$爲質數

2. 設$a \in N$，且$\dfrac{3a+17}{2a-3} \in N$，則$a =$__________。

Ans： 2 或 23

解析：

$\dfrac{3a+17}{2a-3} \in N \quad \Rightarrow \quad 2a - 3 \mid 3a + 17$ 且 $2a - 3 \mid 2a - 3$

$\Rightarrow \quad 2a - 3 \mid 2(3a + 17) - 3(2a - 3) \quad \Rightarrow \quad 2a - 3 \mid 43$

$\therefore \quad 2a - 3 = 1$ 或 43，又 $a \in N \quad \therefore \quad a = 2$ 或 23

3. 設$n \in N$，若 $2n + 5 \mid 3n - 17$，則所有的n值爲__________。

Ans： 1，22

解析：

$\because \quad 2n + 5 \mid 3n - 17$ 又 $2n + 5 \mid 2n + 5$

$\therefore \quad 2n + 5 \mid 3(2n + 5) - 2(3n - 17) \quad \Rightarrow \quad 2n + 5 \mid 49$

$\because \quad n \in N \quad \therefore \quad 2n + 5 = 1，7，49 \quad \Rightarrow \quad n = 1，22，-2$（不合）

4. 設a，$b \in N$，以 5 除a餘 3，以 5 除b餘 2，則以 5 除 $2a^2 + ab + b^2$，得餘數爲__________。

Ans： 3

解析：

設$a = 5x + 3$，$b = 5y + 2$，x，$y \in Z$

$2a^2 + ab + b^2 = 2(5x + 3)^2 + (5x + 3)(5y + 2) + (5y + 2)^2$

$= 50x^2 + 60x + 18 + 25xy + 10x + 15y + 6 + 25y^2 + 20y + 4$

$= 50x^2 + 60x + 25xy + 10x + 15y + 25y^2 + 20y + 18 + 6 + 4$

$= 5k + 28 = 5k + 25 + 3$

$\therefore$ 以 5 除 $2a^2 + ab + b^2$得餘數爲 3

5. a，$b \in N$，$a + 2b = 126$，$[a，b] = 140$，則數對$(a，b) =$__________。

Ans： (70，28)

解析：

設$(a，b) = d$，$a = dm$，$b = dn$，d，m，$n \in N$，$(m，n) = 1$

由$\begin{cases} a + 2b = 126 \\ [a，b] = 140 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} d(m + 2n) = 126 \\ dmn = 140 \end{cases}$

$\therefore \quad d$爲 126，140 的公因數 $\quad \therefore \quad d \mid (126，140) = 14$

(i) $d = 1$時，$m + 2n = 126$，$mn = 140 \quad \Rightarrow \quad n^2 - 63n + 70 = 0$，$\because \quad n \notin N$，不合

(ii) $d = 2$時，$m + 2n = 63$，$mn = 70 \quad \Rightarrow \quad 2n^2 - 63n + 70 = 0$，$\because \quad n \notin N$，不合

(iii) $d = 7$時，$m + 2n = 18$，$mn = 20 \quad \Rightarrow \quad n^2 - 9n + 10 = 0$，$\because \quad n \notin N$，不合

或(iv) $d = 14$時，$m + 2n = 9$，$mn = 10$

$\Rightarrow \quad n = 2$ 或 $n = \dfrac{5}{2}$（不合） $\Rightarrow \quad m = 5$

$\therefore \quad a = 14 \times 5 = 70$，$b = 14 \times 2 = 28$

6. 設 a，b 均為自然數，且 $a - b = 34$，$[a，b] = 255$，則數對 $(a，b) =$ ＿＿＿＿＿＿。

Ans： $(85，51)$

解析：

令 $(a，b) = d$ 且 $a = hd$，$b = kd$，則 $(h，k) = 1 \quad \Rightarrow \quad (h - k，hk) = 1$

$\because \quad a - b = 34 \quad \therefore \quad hd - kd = 34 \quad \Rightarrow \quad (h - k)d = 34$

$\because \quad [a，b] = 255 \quad \therefore \quad hkd = 255$

$\because \quad (h - k，hk) = 1 \quad \therefore \quad d = (34，255) = 17 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} h - k = 2 \\ hd = 15 \end{cases}$

$\because \quad (h，k) = 1 \quad \therefore \quad h = 5$，$k = 3$，故 $a = 85$，$b = 51$

7. 設 a，$b \in Z$，滿足 $a > b$，且 $(a，b) = 21$，$[a，b] = 378$，則所有 a 的值之和 $=$ ＿＿＿＿＿＿。

Ans：. 504

解析：

$(a，b) = 21 \quad \therefore \quad a = 21u$，$b = 21v$ 且 u，v 互質，$u > v$

$[a，b] = [21u，21v] = 21[u，v] = 378 \quad \therefore \quad [u，v] = 18$

$\therefore \quad (u，v) = (18，1)，(9，2)，(-1，-18)$ 或 $(-2，-9)$

$\therefore$ 所有 a 的值之和 $= 21(18 + 9 - 1 - 2) = 504$

8. $(2993)^{74687}$ 的乘積除以 10 所得餘數為＿＿＿＿＿＿。

Ans： 7

解析：

利用 $(2993)^4 = \cdots 1$（個位數字為 1）

$\therefore \quad (2993)^{74687} = [(2993)^4]^{18671} \cdot (2993)^3 = (\cdots 1)^{18671} \cdot (\cdots 7)$

$= (\cdots 1) \cdot (\cdots 7) = \cdots 7$

$\therefore \quad (2993)^{74687}$ 的個位數字為 7，除以 10 所得餘數為 7

9. $n = 2^7 \times 3^4 \times 5^3$ 的正因數中，被 45 整除，不被 8 整除者共＿＿＿＿＿＿個。

Ans： 27

解析：

$45 = 3^2 \times 5$

$n = 2^7 \times 3^4 \times 5^3$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$2^0 \quad 3^2 \quad 5^1$

$2^1 \quad 3^3 \quad 5^2$

$2^2 \quad 3^4 \quad 5^3$

$\therefore$ 方法共 $3 \times 3 \times 3 = 27$ 種

10. 設a，b，q_1，q_2，q_3皆爲正整數且滿足$\begin{cases} a = b \cdot q_1 + 792 \\ b = 792 \cdot q_2 + 378 \\ 792 = 378 \cdot q_3 + 36 \end{cases}$，則$a$與$b$之最大公因數爲___

。

Ans： 18

解析：

由輾轉相除法原理知

$(a，b) = (b，792) = (792，378) = (378，36) = 18$

11. 設$n = 113400$，a爲正整數，且$n \mid a^3$，則a最小值爲__________。

Ans：. 630

解析：

$n = 113400 = 2^3 \times 3^4 \times 5^2 \times 7$

$\because$ a爲正整數且$n \mid a^3$ $\therefore$ a^3最小值爲 $2^3 \times 3^6 \times 5^3 \times 7^3$

$\therefore$ a最小值爲 $2 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 630$

12. 1 到 1000 的自然數中，

(1)爲 3 倍數，但不爲 2 倍數者有__________個。

(2)爲 3 倍數，但不爲 2 倍數，亦不爲 5 倍數者有 __________個。

Ans： (1) 167 (2) 134

解析：

(1) $[\frac{1000}{3}] - [\frac{1000}{6}] = 333 - 166 = 167$

(2) $[\frac{1000}{3}] - [\frac{1000}{6}] - [\frac{1000}{15}] + [\frac{1000}{30}] = 333 - 166 - 66 + 33 = 134$

13. 設成功高中一年級學生人數在 1000 至 1500 人之間，今將學生各以 5、7、13 人分組皆多出 3 人，則成功高中高一學生人數有__________人。

Ans： 1368

解析：

學生人數是 5，7，13 的公倍數加 3，$[5，7，13] = 455$，則學生人數爲 $455k + 3$

因學生人數介在 1000 至 1500 人之間，則取 $k = 3$，有 $455 \times 3 + 3 = 1368$ 人

14. 有一個五位數 $17a1b$含有因數 5 與 9，求此五位數爲__________。

Ans： 17010，17910，17415

解析：

$17a1b$ 含有 5 及 9 的因數 $\therefore$ $b = 0$ 或 5

① $b = 0$，$9 \mid 17a10$ $\Rightarrow$ $9 \mid 1 + 7 + a + 1 + 0 = 9 + a$ $\therefore$ $a = 0$ 或 9

② $b = 5$，$9 \mid 17a15$ $\Rightarrow$ $9 \mid 1 + 7 + a + 1 + 5 = 14 + a$ $\therefore$ $a = 4$

$\therefore$ 此五位數爲 17010，17910，17415

15. 天干地支記日是以天干（甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬、癸），地支（子、丑、寅、卯、辰、巳、午、未、申、酉、戌、亥）搭配，如甲子、乙丑、丙寅、…、癸亥，週期循環記日。已知民國 89 年 10 月 17 日是戊申日，推算民國 90 年 1 月 24 日（春節）以天干地支記日是__________日。

Ans： 丁亥

解析：

$(31-17)+30+31+24=99$

$99\div 10=9\cdots 9$ $\therefore$ 天干從“戊”向後算第 9 個爲丁

$99\div 12=8\cdots 3$ $\therefore$ 地支從“申”向後算第 3 個爲亥

16. 若x，$y\in N$，又$\dfrac{5}{x}+\dfrac{7}{y}=2$之解共有$n$組，這$n$組爲$(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$，⋯，$(x_n，y_n)$，則$x_1+x_2+\cdots+x_n=$__________。

Ans： 34

解析：

$$\frac{5}{x}+\frac{7}{y}=2 \quad\Rightarrow\quad 2xy-7x-5x=0 \quad\Rightarrow\quad x(2y-7)-5(y-\frac{7}{2})=\frac{35}{2}$$

同乘 2

$$\Rightarrow\quad 2x(2y-7)-5(2y-7)=35 \quad\Rightarrow\quad (2x-5)(2y-7)=35$$

$$\Rightarrow\quad \begin{cases} 2x-5= & 1 & 5 & 35 & -1 & -5 & -35 & 7 & -7 \\ 2y-7= & 35 & 7 & 1 & -35 & -7 & -1 & 5 & -5 \end{cases}$$

$$\because\quad x，y\in N \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x= & 3 & 5 & 20 & 6 \\ y= & 21 & 7 & 4 & 6 \end{cases}，\therefore\quad x_1+x_2+x_3+x_4=3+5+20+6=34$$

17. (1)求 6328 與 18645 之最大公因數__________。

(2)續上題，找出一組整數m，n使$6328m+18645n=(6328，18645)$，則數對$(m，n)=$__________。

Ans：. (1) 113 (2) (56，− 19)

解析：

(1)利用輾轉相除法

a	6328	18645	b
$-2a+b$	5989	12656	$2a$
$3a-b$	339	5989	$-2a+b$
$-53a+18b$	226	5763	$17(3a-b)$
$56a-19b$	113	226	$-53a+18b$
		226	
		0	

$\therefore$ $(6328，18645)=113$ 且 $113=6328\times 56+18645\times(-19)$

$\therefore$ $(m，n)=(56，-19)$