高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：92.10.06					
範圍	函數+ans	班級		姓名	
		座號			

一、選擇題 (每題 5 分)

1.(　　) 設集合$A=\{1，2，3\}$，$B=\{4，5，6，7，8\}$，則下列何者為A映至B的函數？

(A) $f_1(x)=x+1$　(B) $f_2(x)=2x$　(C) $f_3(x)=x+3$　(D) $f_4(x)=3x+1$
(E) $f_5(x)=x^2$。

Ans. (C)

解析：(A) $f_1(1)=2\notin B$　∴　$f_1(x)$不是A映至B的函數
(B) $f_2(1)=2\notin B$　∴　$f_2(x)$不是A映至B的函數
(C) $f_3(1)=4$，$f_3(2)=5$，$f_3(3)=6$ 均在B中　∴　$f_3(x)$是A映至B的函數
(D) $f_4(1)=4$，$f_4(2)=7$ 均在B中，但$f_4(3)=10\notin B$　∴　$f_4(x)$不是A映至B的函數
(E) $f_5(1)=1\notin B$　∴　$f_5(x)$不是A映至B的函數

2.(　　) 試判斷下列各函數，何者為一對一函數？__________。

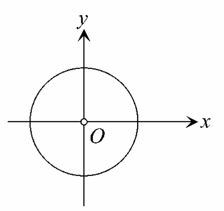
(A) $f(x)=3x+1$　(B) $f(x)=x^2+1$　(C) $f(x)=|x|$　(D) $f(x)=1999$。

Ans. (A)

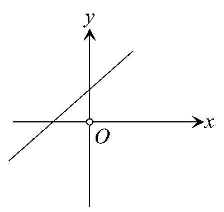
解析：(A) $f(x)=3x+1$ 是一次函數，顯見它為 1–1 函數
(B) $f(x)=x^2+1$ 中，$f(2)=f(-2)=5$　⇒　f不是 1–1 函數
(C) $f(x)=|x|$ 中，$f(2)=f(-2)=2$　⇒　f不是 1–1 函數
(D) $f(x)=1999$ 中，其為常數函數，$f(0)=f(1)=1999$ ⇒　f不是 1–1 函數

3.(　　) 下列的圖形中，何者不是 $y=f(x)$之函數圖形？

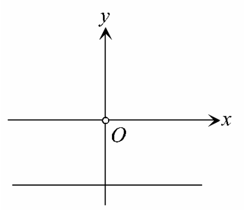
(A)



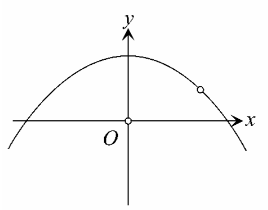
(B)



(C)



(D)



Ans. (A)

解析：若 x 所對應的 $f(x)$，必須是唯一的，而且是確定的，則 $y=f(x)$為一函數；
即向 x 軸所做的垂線與圖形只能有唯一的交點
(A)圖中向 x 軸所做的垂線與圖形有二交點，即(A)之 x 有 2 個 $f(x)$值與之對應
∴　(A)不是函數

4. 下列那一個函數的定義域不會是R？

(A) $f(x)=x^2-x+1$　(B) $f(x)=\sqrt{x^2}$　(C) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$　(D) $f(x)=3$

Ans. (C)

解析：

(C) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ $\Rightarrow$ f之定義域 $=R-\{1\}\neq R$　其餘之定義域均爲 R

5. 設 $f(x)=\begin{cases}1，x<0\\ 2，x=0\\ \dfrac{1}{2}，x>0\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}x-2，|x|\leq 1\\ x^2+1，|x|>1\end{cases}$，則下列何者正確？

(A) $g\circ f(3)=1$　(B) $f\circ g(3)=\dfrac{1}{2}$　(C) $g\circ g(0)=5$　(D) $f\circ f(-1)=1$

(E) $g\circ f(-1)=-1$。

Ans. (B)(C)(E)

解析：

$f(x)=\begin{cases}1，x<0\\ 2，x=0\\ \dfrac{1}{2}，x>0\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}x-2，|x|\leq 1\\ x^2+1，|x|>1\end{cases}$

(A) $g\circ f(3)=g(f(3))=g(\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{2}-2=-\dfrac{3}{2}$ ……不正確

(B) $f\circ g(3)=f(g(3))=f(3^2+1)=f(10)=\dfrac{1}{2}$ ……正確

(C) $g\circ g(0)=g(g(0))=g(0-2)=g(-2)$

$=(-2)^2+1=5$……正確

(D) $f\circ f(-1)=f(f(-1))=f(1)=\dfrac{1}{2}$ ……不正確

(E) $g\circ f(-1)=g(f(-1))=g(1)=1-2=-1$……正確

5. 設 $f(x)=3x^2-4x+5$，$g(x-1)=f(2x+1)$，$h(3x+2)=g(x+1)$，則 $h(5)=$ ＿＿＿＿＿＿，$h(x)=$ ＿＿＿＿＿＿。

Ans $h(5)=124$；$h(x)=\dfrac{1}{3}(4x^2+36x+92)$

解析：

(1) $h(3x+2)=g(x+1)$，令 $x=1$ $\Rightarrow$ $h(5)=g(2)$

$g(x-1)=f(2x+1)$，令 $x=3$ $\Rightarrow$ $g(2)=f(7)$

$\therefore$ $h(5)=g(2)=f(7)=3\cdot 7^2-4\cdot 7+5=147-28+5=124$

(2) $h(3x+2)=g(x+1)$，令 $3x+2=t$ $\Rightarrow$ $x=\dfrac{t-2}{3}$ 代入

$\Rightarrow$ $h(t)=g(\dfrac{t-2}{3}+1)=g(\dfrac{t+1}{3})$

$g(x-1)=f(2x+1)$，令$x-1=\dfrac{t+1}{3} \quad \Rightarrow \quad x=\dfrac{t+4}{3}$代入

$\Rightarrow \quad g(\dfrac{t+1}{3})=f(2\cdot\dfrac{t+4}{3}+1)=f(\dfrac{2t+11}{3})$

$\therefore \quad h(x)=g(\dfrac{x+1}{3})=f(\dfrac{2x+11}{3})$

$=3(\dfrac{2x+11}{3})^2-4\cdot\dfrac{2x+11}{3}+5$

$=\dfrac{12x^2+108x+276}{9}=\dfrac{4x^2+36x+92}{3}$

6. 設$f(x)=x^2+x+1$，$g(x)=2x+3$，則$g(f(2))+f(g(-2))=$
__________。

Ans.18

解析：$f(x)=x^2+x+1 \quad \Rightarrow \quad f(2)=7$

$g(x)=2x+3 \quad \Rightarrow \quad g(-2)=-1$

$\therefore \quad g(f(2))+f(g(-2))=g(7)+f(-1)$

$=14+3+1+(-1)+1=18$

7. 設函數$f(x)=\dfrac{2x+5}{x-2}$，$x\in R$，$x\neq 2$，則 $f^{-1}(x)=$ __________。

Ans.$\dfrac{2x+5}{x-2}=f(x)$，$x\neq 2$

解析：

令$y=\dfrac{2x+5}{x-2}$，$x\neq 2$

$\Rightarrow \quad xy-2y=2x+5 \quad \Rightarrow \quad xy-2x=2y+5 \quad \Rightarrow \quad x(y-2)=2y+5$

$y\neq 2 \quad \Rightarrow \quad x=\dfrac{2y+5}{y-2}=f^{-1}(y) \qquad \therefore \quad f^{-1}(x)=\dfrac{2x+5}{x-2}$，$x\neq 2$

8. 設有一函數$f(x)$，滿足① $f(x)=3x+1$，$0\leq x<7$；② $f(x+7)=f(x)$，$\forall x\in R$，試求：(1) $f(5)=$ __________。 (2) $f(1999)=$ __________。

Ans.(1) 16 (2) 13

解析：(1) $x=5$ 滿足 $0\leq x<7 \quad \Rightarrow \quad f(5)=3\cdot 5+1=16$

(2) $f(x+7)=f(x) \quad \Rightarrow \quad f$可視爲一個週期函數，且週期爲 7

$\therefore \quad f(1999)=f(1992+7)=f(1992)=f(1985+7)=f(1985)=\cdots$

由 $1999=7\times 285+4 \quad \Rightarrow \quad f(1999)=f(4)=3\cdot 4+1=13$

9. 若$f(\dfrac{x-1}{x+1})=\dfrac{x+1}{x-1}$，則$f(\dfrac{1}{2})=$__________及$f(x)=$__________。

Ans.2；$\dfrac{1}{x}$

解析：

$\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad x=3\qquad\qquad f(\dfrac{1}{2})=\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{4}{2}=2$

令 $\dfrac{x-1}{x+1}=\alpha\quad\Rightarrow\quad x=\dfrac{-\alpha-1}{\alpha-1}$

$f(\alpha)=\dfrac{-2}{-2\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}\quad\therefore\quad f(x)=\dfrac{1}{x}$

10. 設函數 $f(x)=\sqrt{6x-8-x^2}$，則 f 之定義域 $D=$ __________，值域 $f(D)=$ __________。

Ans. $D=[2，4]$；$f(D)=[0，1]$

解析：$f(x)=\sqrt{6x-8-x^2}\quad\Rightarrow\quad 6x-8-x^2\ge 0\quad\Rightarrow\quad x^2-6x+8\le 0$

$\Rightarrow\quad (x-2)(x-4)\le 0\quad\Rightarrow\quad 2\le x\le 4$

$\therefore$ 定義域 $D=[2，4]=\{x\mid x\in R，2\le x\le 4\}$

又 $y=\sqrt{6x-8-x^2}=\sqrt{1-(x-3)^2}$

當 $x=3$ 時，y 有最大值 $=1$

當 $x=2$ 或 4 時，y 有最小值 $=0$

$\Rightarrow\quad 0\le y\le 1\qquad\therefore$ 值域 $=[0，1]=\{y\mid y\in R，0\le y\le 1\}$

12. 函數 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{6-x-x^2}}$ 的定義域爲__________。

Ans. $\{x\mid -3<x<2\}$

解析：由 $6-x-x^2>0$

$\therefore\quad x^2+x-6<0\quad\Rightarrow\quad (x+3)(x-2)<0$

$\therefore\quad -3<x<2\qquad\therefore\quad f(x)$ 之定義域爲 $\{x\mid -3<x<2\}$

13. 設 $f(n)$ 表 $\dfrac{1}{7}$ 化成小數時，小數點後第 n 位數字，則

(1) $f(100)=$ __________。　　(2)又 f 的值域爲__________。

Ans.(1) 8　(2) $\{1，4，2，8，5，7\}$

解析：(1) $\dfrac{1}{7}=0.\overline{142857}$，而 $\dfrac{100}{6}=16\cdots 4$，故 $f(100)=8$

(2) $f(n)=1，4，2，8，5，7\qquad\therefore$ 值域爲 $\{1，4，2，8，5，7\}$

14. 設 $f(x)=a(2^x)+b$，a，b 爲實數，已知 $f(1)=7$，$f(2)=13$，則 $f(3)$ 之值爲__________。

Ans.25

解析：$f(1)=7，f(2)=13\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}2a+b=7\\4a+b=13\end{cases}\quad\therefore\quad a=3，b=1$

$\therefore\quad f(x)=3(2^x)+1\quad\therefore\quad f(3)=25$

15. 函數$f(x)=\begin{cases}2x+1，x\geq 1\\ x^2+2，-2\leq x<1\\ x+8，x<-2\end{cases}$，則$f(2)+f(-1)+f(-3)$之值爲__________。

Ans.13

解析：

$$f(x)=\begin{cases}2x+1，x\geq 1\\ x^2+2，-2\leq x<1\\ x+8，x<-2\end{cases}$$

$$\therefore\quad f(2)+f(-1)+f(-3)=(2\times 2+1)+[(-1)^2+2]+(-3+8)=5+3+5=13$$