

高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：92.09.18				
範圍	1-2 集合+Ans	班級		姓名
		座號		

一. 選擇題 (每題 8 分)

1. () 設 $A = \{1, \{2\}, 3\}$ ，則下列敘述何者正確？(複選)

(A) $2 \in A$ (B) $\{2\} \in A$ (C) $\{2\} \subset A$ (D) $\{3\} \subset A$ (E) $\phi \in A$

Ans : (B)(D)

【詳解】

(1) 利用 $P \subset Q \Leftrightarrow \forall x \in P$ 恆有 $x \in Q \therefore \{2\} \in A, \{2\} \not\subset A$

(2) $\therefore \phi \subset P, \forall P \therefore \phi = A, \phi \notin A$

2. () 設 A 表一集合，且 $\{1\} \subset A \subset \{1, 2, 3, 4\}$ ，則 A 集合共有幾個？(單選)

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 8 (E) 16

Ans : (D)

【詳解】

$\{1\} \subset A \subset \{1, 2, 3, 4\}$

\therefore 則 $A = \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}$ ，共有 8 個

3. () 設 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ，

$B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ ， $C = \{3, 6, 9, 12, 15\}$ ，

則下列各式何者是正確的？(複選)

(A) $A - B = \{2, 4, 6, 8, 10, -11\}$

(B) $B - A = \{11\}$

(C) $A - (B \cup C) = \{2, 4, 8, 10\}$

(D) $(B \cup C) - A = \{11, 12, 15\}$

(E) $(A \cap B) - C = B - C$

Ans : (B)(C)(D)

【詳解】

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$

$C = \{3, 6, 9, 12, 15\}$

(A) $A - B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ ，故(A)為不正確

(B) $B - A = \{11\}$ ，故(B)為正確

(C) $B \cup C = \{1, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 15\}$

$\Rightarrow A - (B \cup C) = \{2, 4, 8, 10\}$ ，故(C)為正確

(D) $(B \cup C) - A = \{11, 12, 15\}$ ，故(D)為正確

(E) $A \cap B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$\Rightarrow (A \cap B) - C = \{1, 5, 7\}$ ， $B - C = \{1, 5, 7, 11\}$

故 $(A \cap B) - C \neq B - C \therefore$ (E)為不正確

二. 填充題 (每題 8 分)

1. (1)若數對 $(x-1, y-2) = (2y+1, 3-x)$, 試求 x, y 之值。

(2)若集合 $\{x-1, y-2\} = \{2y+1, 3-x\}$, 試求 x, y 之值。

Ans: (1) $x=4, y=1$ (2) $x=4, y=1$ 或 $x=2, y=-3$

【詳解】

(1)對數對而言, $a \neq b \Rightarrow (a, b) \neq (b, a)$

即 $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a=c$ 且 $b=d$

今 $(x-1, y-2) = (2y+1, 3-x)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=2y+1 \\ y-2=3-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y=2 \\ x+y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$$

(2)對集合而言, 因其沒有次序關係, 即 $\{a, b\} = \{b, a\}$

今 $\{x-1, y-2\} = \{2y+1, 3-x\}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=2y+1 \\ y-2=3-x \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x-1=3-x \\ y-2=2y+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$$

2. 集合 $A = \{0, \{0\}, \phi\}$ 的部分集合共_____個。

Ans: $\phi, \{0\}, \{\{0\}\}, \{\phi\}, \{0, \{0\}\}, \{0, \phi\}, \{\{0\}, \phi\}, A$ 共有 $2^3 = 8$ 個部分集合

【詳解】

集合 A 有三個元素, 則 A 共有 $2^3 = 8$ 個部分集合

集合 A 有 n 個元素, 則 A 共有 2^n 個部分集合

3. 設三集合 $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}, B = \{2, 4, 6, 8\}, C = \{x \mid x \text{ 是質數}\}$, 則

$(A \cup B) - C =$ _____。

Ans: $\{1, 4, 6, 8, 9\}$

【詳解】

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}, B = \{2, 4, 6, 8\}, C = \{x \mid x \text{ 是質數}\}$

$\Rightarrow A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$

$(A \cup B) \cap C = \{2, 3, 5, 7\}$

$\Rightarrow (A \cup B) - C = (A \cup B) - [(A \cup B) \cap C] = \{1, 4, 6, 8, 9\}$

4. 在何種條件下, 會使 $A - B = B - A$ 成立? _____。

Ans: $A = B$

【詳解】

(1)設 $x \in A - B \Rightarrow x \in A$ 且 $x \notin B$

又 $A - B = B - A \Rightarrow x \in B$, 此為不可能

除非此 x 不存在, 即 $A - B = \phi$, 隨之, $A \subset B$

(2)設 $x \in B - A$, 利用同樣的方法, 可得 $B \subset A$, 故 $A = B$

5. 設 a, b 為二實數，二集合 $A = \{(x, y) \mid ax - 2y = 8\}$ ， $B = \{(x, y) \mid x + by = 5\}$ ，若 $A \cap B = \{(2, 1)\}$ ，則數對 $(a, b) =$ _____。

Ans : (5, 3)

【詳解】

$$A \cap B = \{(2, 1)\}$$

$$\Rightarrow (2, 1) \in A \Rightarrow x = 2, y = 1 \text{ 滿足 } ax - 2y = 8$$

$$\Rightarrow \text{代入 } 2a - 2 = 8 \Rightarrow a = 5 \quad \text{同理：} 2 + b = 5 \Rightarrow b = 3$$

6. 設二集合 $L_1 = \{(x, y) \mid 3x - y - 5 = 0\}$ ， $L_2 = \{(a + b, a - b) \mid 3a - b - 4 = 0\}$ ，則 $L_1 \cap L_2 =$ _____。

Ans : (2, 1)

【詳解】

$$L_2 = \{(a + b, a - b) \mid 3a - b - 4 = 0\}$$

$$\left(\text{令 } x = a + b, y = a - b \Rightarrow a = \frac{x + y}{2}, b = \frac{x - y}{2} \right)$$

$$L_2 = \{(x, y) \mid 3 \cdot \frac{x + y}{2} - \frac{x - y}{2} - 4 = 0\}$$

$$= \{(x, y) \mid 2x + 4y - 8 = 0\}$$

$$= \{(x, y) \mid x + 2y - 4 = 0\}$$

$$L_1 \cap L_2 : \begin{cases} 3x - y - 5 = 0 \\ x + 2y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \therefore L_1 \cap L_2 = \{(2, 1)\}$$

7. 設 a 為一整數，二集合 $A = \{2, 3, a^2 - 5a + 10\}$ ， $B = \{2a - 2, -5a + 13, -a + 6\}$ ，若 $A \cap B = \{3, 4\}$ ，則 a 之值 = _____。

Ans : 3

【詳解】

$$A \cap B = \{3, 4\} \Rightarrow a^2 - 5a + 10 = 4 \Rightarrow a^2 - 5a + 6 = 0 \Rightarrow a = 2, 3$$

$$(1) a = 2 \Rightarrow \begin{cases} A = \{2, 3, 4\} \\ B = \{2, 3, 3\} \end{cases} \Rightarrow A \cap B \neq \{3, 4\}, \text{ 故 } a = 2 \text{ 不合}$$

$$(2) a = 3 \Rightarrow \begin{cases} A = \{2, 3, 4\} \\ B = \{4, -2, 3\} \end{cases} \Rightarrow A \cap B = \{3, 4\}, \text{ 合理。故 } a = 3$$

8. 設 $A = \{2, 4, a^2 - 2a - 3\}$ ， $B = \{-4, a^2 + 2a + 2, a^2 - 3, 2a^2 - 3a - 9\}$ ，若 $A \cap B = \{2, 5\}$ ，則 $a =$ _____。

Ans : -2

【詳解】

$$A = \{2, 4, a^2 - 2a - 3\}$$

$$B = \{-4, a^2 + 2a + 2, a^2 - 3, 2a^2 - 3a - 9\}$$

$$\text{若 } A \cap B = \{2, 5\}, \text{ 由集合 } A \text{ 知 } a^2 - 2a - 3 = 5$$

$$\therefore a^2 - 2a - 8 = 0 \Rightarrow a = 4 \text{ 或 } -2$$

$$(1) \text{當 } a = 4 \text{ 時，在集合 } B \text{ 中，} a^2 + 2a + 2 = 26,$$

$$a^2 - 3 = 13, 2a^2 - 3a - 9 = 11 \text{ 不合}$$

(2) 當 $a = -2$ 時，在集合 B 中， $a^2 + 2a + 2 = 2$ ，

$$a^2 - 3 = 1, 2a^2 - 3a - 9 = 5$$

$$\Rightarrow B = \{-4, 2, 1, 5\} \text{ 滿足 } A \cap B = \{2, 5\} \quad \therefore a = -2$$

9. 設 $A = \{x | x \in R, x^2 - x + k = 0\}$ ， $B = \{2, 3\}$ ，若 $B - A = \{2\}$ ，則 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

Ans: -6

【詳解】

$$x^2 - x + k = 0, x = 3 \quad (\because B - A = \{2\})$$

$$9 - 3 + k = 0 \Rightarrow k = -6$$

10. 設 $a, b \in R$ ， $A = \{a^2, a + 1, 3\}$ ， $B = \{2b + 1, 2a - 1, a - 3\}$ 且

$$A \cap B = \{-3\}$$
，則 $a + b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

Ans: $a = -4, b = -2$

【詳解】

$$\text{由 } a^2 \neq -3 \quad \therefore a + 1 = -3 \Rightarrow a = -4$$

$$A = \{16, -3, 3\}, B = \{2b + 1, -9, -6\}, \text{ 但 } A \cap B = \{-3\}$$

$$-3 \in B \Rightarrow 2b + 1 = -3, b = -4$$

11. 若高一同學共 1000 人其中喜愛數學的有 500 人，喜愛音樂的有 700 人，則兩者都喜愛的最多有 人，最少有 人。

Ans: 500; 200

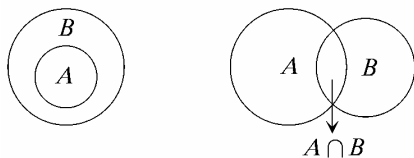
【詳解】

設 A 為喜愛數學的人， B 為喜愛音樂的人，則 $n(A) = 500, n(B) = 700$

① 當 $A \subset B$ 時， $n(A \cap B) = 500$ 為最多

② 當 $n(A \cup B) = 1000$ 時

$$\begin{aligned} n(A \cap B) &= n(A) + n(B) - n(A \cup B) \\ &= 500 + 700 - 1000 = 200 \text{ 為最少} \end{aligned}$$



12. 設 $U = \{n | n \in N, n \leq 10\}$ 為宇集， A 與 B 均為 U 之子集，已知 $A \cap B = \{3, 4\}$ ， $A \cap B' = \{7, 9, 10\}$ ， $A' \cap B' = \{2, 8\}$ ，則 $B = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

Ans: $B = \{1, 3, 4, 5, 6\}$

【詳解】

$$U = \{1, 2, \dots, 9, 10\}$$

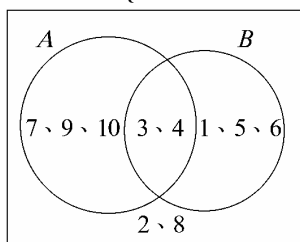
$$A \cap B = \{3, 4\} \Rightarrow \{3, 4\} \subset A, \{3, 4\} \subset B$$

$$A \cap B' = \{7, 9, 10\} \Rightarrow \{7, 9, 10\} \subset A, \{7, 9, 10\} \subset B'$$

$$A' \cap B' = \{2, 8\} \Rightarrow \{2, 8\} \subset A', \{2, 8\} \subset B'$$

$$\therefore B \cap A' = \{1, 5, 6\}$$

$$\therefore A = \{3, 4, 7, 9, 10\}, B = \{1, 3, 4, 5, 6\}$$



13. 設 $A = \{x \mid -3 < x < 2\}$, $B = \{x \mid -2 < x < 4\}$, 則 $A \cap B' =$ _____。

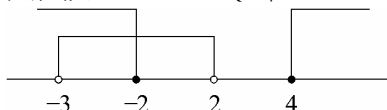
Ans: $\{x \mid -3 < x < -2\}$

【詳解】

$$A = \{x \mid -3 < x < 2\}$$

$$B = \{x \mid -2 < x < 4\} \Rightarrow B' = \{x \mid x \geq 4 \text{ 或 } x \leq -2\}$$

由圖知 $A \cap B' = \{x \mid -3 < x < -2\}$



14. 設 $A = \{x \mid x \in R, 2 < x < 5\}$, $B = \{x \mid x \in R, 2 \leq |2x + 1| \leq 7\}$, 則

(1) $B =$ _____。

(2) $B - A =$ _____。

Ans: (1) $B = \{x \mid x \in R, -4 \leq x \leq -\frac{3}{2} \text{ 或 } \frac{1}{2} \leq x \leq 3\}$

(2) $B - A = \{x \mid x \in R, -4 \leq x \leq -\frac{3}{2} \text{ 或 } \frac{1}{2} \leq x \leq 2\}$

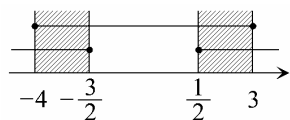
【詳解】

$$(1) \textcircled{1} |2x + 1| \geq 2 \Rightarrow 2x + 1 \geq 2 \text{ 或 } 2x + 1 \leq -2$$

$$\Rightarrow x \geq \frac{1}{2} \text{ 或 } x \leq -\frac{3}{2}$$

$$\textcircled{2} |2x + 1| \leq 7 \Rightarrow -7 \leq 2x + 1 \leq 7 \Rightarrow -4 \leq x \leq 3$$

由 $\textcircled{1} \cap \textcircled{2}$ 知 $B = \{x \mid x \in R, -4 \leq x \leq -\frac{3}{2} \text{ 或 } \frac{1}{2} \leq x \leq 3\}$



(2) $B - A = \{x \mid x \in R, -4 \leq x \leq -\frac{3}{2} \text{ 或 } \frac{1}{2} \leq x \leq 2\}$

15. 設二集合 $A = \{0, 2, a^2 - a - 3\}$, $B = \{-1, a + 1\}$, 若 $B \subset A$, 求 a 之值 = _____。

Ans: -1

【詳解】

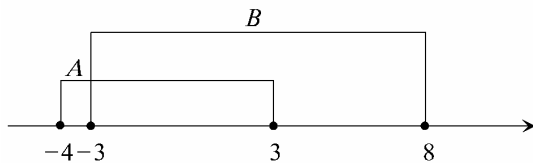
$\therefore \{-1, a+1\} = B \subset A = \{0, 2, a^2 - a - 3\}$
 $\therefore -1 = a^2 - a - 3 \Rightarrow (a-2)(a+1) = 0 \Rightarrow a = 2 \text{ 或 } -1$
 (1) $a = 2$ 時, $a+1 = 3 \notin \{0, 2, -1\}$, 不合
 (2) $a = -1$ 時, $a+1 = 0 \in \{0, 2, -1\} \therefore a = -1$

16. (1) 已知 $A = \{x \mid \sqrt{x} \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq 10^6\}$, $B = \{x \mid x = 20k, k \in \mathbb{Z}\}$, 則 $n(A - B) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
 (2) $x \in \mathbb{R}$, 設 $A = \{x \mid -4 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x \mid -3 \leq x \leq 8\}$, 則 $A \cap B = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
 (3) 已知 $A = \{(x, y) \mid 2x - y = 1\}$, $B = \{(y-1, x+2) \mid ax + by = 1\}$,
 若 $A = B$, 則 $a^2 + b^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

Ans: (1) 900 (2) $\{x \mid -3 \leq x \leq 3\}$ (3) $\frac{1}{5}$

【詳解】

- (1) $1 \leq x \leq 10^6 \quad \therefore \sqrt{x} \in \mathbb{N}, 1 \leq \sqrt{x} \leq 10^3$
 $\therefore n(A) = 10^3 - 1 + 1 = 1000$
 $x = 20k = 2^2 \cdot 5 \cdot k, k = 5^1 \cdot m^2, \sqrt{x} = 10m, n(B) = 100$
 $n(A - B) = 1000 - 100 = 900$
 (2)



$$\Rightarrow A \cap B = \{x \mid -3 \leq x \leq 3\}$$

- (3) $\therefore A = \{(x, y) \mid 2x - y = 1\}$
 $B = \{(y-1, x+2) \mid ax + by = 1\}$
 $= \{(m, n) \mid bm + an = 2a - b + 1\}$
 $= \{(x, y) \mid bx + ay = 2a - b + 1\}$

$$\left(\because \begin{cases} y-1 = m \\ x+2 = n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = m+1 \\ x = n-2 \end{cases} \Rightarrow \text{代入 } ax + by = 1 \right.$$

$$\Rightarrow a(n-2) + b(m+1) = 1 \Rightarrow bm + an = 2a - b + 1 \quad \left. \right)$$

$$A = B \Rightarrow \frac{2}{b} = \frac{-1}{a} = \frac{1}{2a - b + 1} \quad \begin{cases} 2a = -b \\ a = -(2a - b + 1) \end{cases} \therefore a = -\frac{1}{5}, b = \frac{2}{5}$$

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{25} + \frac{4}{25} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

17. 設 $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, |x-3| \leq 2\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, |x-1| \leq 3\}$, 若 $A \cap B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, |x-a| \leq b\}$, 則數對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

Ans: $(\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$

【詳解】

$$A: |x-3| \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 5$$

$$B: |x-1| \leq 3 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 4$$

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{x | 1 \leq x \leq 4\} = \{x | |x-a| \leq b\} \\ &= \{x | a-b \leq x \leq a+b\} \quad \therefore \begin{cases} a-b=1 \\ a+b=4 \end{cases}, a=\frac{5}{2}, b=\frac{3}{2} \end{aligned}$$

18. 某班共有 n 名學生，每人在英文與日文中至少要選修一科，已知選英文者 17 人，選日文者 15 人，兩科都選者 7 人，則 $n =$ _____。

Ans: 25

【詳解】

令 A 表示選修英文的學生， B 表示選修日文的學生

$$\therefore n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \quad \text{即 } n = 17 + 15 - 7 = 25$$

19. 設 $A = \{(y, x) | 2x + y = 5\}$ ， $B = \{(x-1, y+1) | 2x - y - 3 = 0\}$ ，
則 $A \cap B =$ _____。

Ans: $\{(1, 2)\}$

【詳解】

$$A = \{(y, x) | 2x + y = 5\} = \{(x, y) | 2y + x = 5\}$$

$$B = \{(x-1, y+1) | 2x - y - 3 = 0\}$$

$$= \{(a, b) | 2a - b = 0\} = \{(x, y) | 2x - y = 0\}$$

$$(\text{令 } a = x-1, b = y+1 \quad \therefore x = a+1, y = b-1)$$

$$\therefore 2x - y = 3 \Rightarrow 2(a+1) - (b-1) = 3 \Rightarrow 2a - b = 0$$

20. 設 $A = \{x | x = 3m + 1, m \in N, x < 300\}$ ， $B = \{x | x = 2(2m - 1), m \in N, x < 300\}$ ，則 $n(A \cap B) =$ _____。

Ans: 25

【詳解】

B 中元素為 $4m - 2$ 型，即被4除之不足2

A 中元素為 $3m + 1$ 型，即被3除之餘1，亦即被3除之不足2

$\therefore A \cap B$ 元素為12除之不足2者：

$$10, 10 + 12 \times 1, 10 + 12 \times 2, \dots, 10 + 12 \times 24$$

共25個 $\therefore n(A \cap B) = 25$

21. 設 k 為一正實數，集合 $A = \{x | |x-1| \leq 4, x \in R\}$ ， $B = \{x | |x-2| \leq k, x \in R\}$ ，

(1)若 $A \subset B$ ，則 k 之最小值 = _____。

(2)若 $B \subset A$ ，則 k 之最大值 = _____。

Ans: (1)5 (2)3

【詳解】

$$\text{集合 } A: |x-1| \leq 4 \Rightarrow -4 \leq x-1 \leq 4 \Rightarrow -3 \leq x \leq 5$$

$$\text{集合 } B: |x-2| \leq k, k > 0 \Rightarrow -k \leq x-2 \leq k \Rightarrow 2-k \leq x \leq 2+k$$

(1) 欲 $A \subset B$, 則須 $2 - k \leq -3$ 且 $2 + k \geq 5$
 $\Rightarrow k \geq 5$ 且 $k \geq 3 \Rightarrow k \geq 5 \therefore k$ 之最小值為 5

(2) 欲 $B \subset A$, 則須 $2 - k \geq -3$ 且 $2 + k \leq 5$
 $\Rightarrow k \leq 5$ 且 $k \leq 3 \Rightarrow k \leq 3 \therefore k$ 之最大值為 3

22. $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$, 若 $ax^2 + bx + c < 0$ 之解集合為 $\{x \mid x \in \mathbb{R}, -2 < x < 5\}$, 試求:

(1) $a : b : c$

(2) $ax^2 - bx + c > 0$ 的解集合。

(3) $\frac{cx + 2a}{ax + b} \geq 0$ 的解集合。

Ans: (1) $1 : (-3) : (-10)$ (2) $(-\infty, -5) \cup (2, \infty)$ (3) $[\frac{1}{5}, 3)$

【詳解】

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a(x+2)(x-5), a > 0 \\ &= ax^2 - 3ax - 10a \quad \therefore b = -3a, c = -10a \end{aligned}$$

(1) $\therefore a : b : c = 1 : (-3) : (-10)$

(2) $ax^2 - bx + c = ax^2 + 3ax - 10a = a(x+5)(x-2) > 0$,
其中 $a > 0 \Rightarrow x < -5$ 或 $x > 2$

$$\begin{aligned} (3) \frac{cx + 2a}{ax + b} &= \frac{-10ax + 2a}{ax - 3a} = \frac{-2(5x-1)}{x-3} \geq 0 \\ \Rightarrow (5x-1)(x-3) < 0 \text{ 或 } x = \frac{1}{5} &\Rightarrow \frac{1}{5} \leq x < 3 \end{aligned}$$