明誠中學　假日輔導數學講義　　日期：2003/03/27　　周營偉師

一. 單一選擇題

1、(C)　$\log 0.436 = -0.3605$ ，則 $\log 0.00436 =$

(A) -0.003605 (B) -1.3605 (C) -2.3605 (D) -2.6395 (E) -3.3605

解析：　$\log 0.436 = -0.3605$ ，$\therefore \log 0.00436 = -2.3605$

2、(A)　$\log 851.1 = 2.930$ ，則 $\log x = -1.07$ ，則 $x =$

(A) 0.08511 (B) 0.8511 (C) 8.511 (D) 847.1 (E) 條件不足

解析：　$\log 851.1 = 2.930$　$\therefore \log 8.511 = 0.930$

$\therefore \log 0.08511 = -2 + 0.930 = -1.07$　$\therefore x = 0.08511$

3、(A)　假設 $g_n = 400 \cdot (\frac{3}{4})^n$ ，n 是自然數，則 $g_n < 10^{-3}$ 時，n 最少是

(A) 45 (B) 46 (C) 47 (D) 48 (E) 49

解析：　$400 \cdot (\frac{3}{4})^n < 10^{-3}$　$\therefore (\frac{4}{3})^n > 4 \times 10^5$

$n(\log 4 - \log 3) > 2\log 2 + 5$，$n > \frac{5.6020}{0.1249} = 44.8...$

4、(E)　$\log x = -1.2345$ ，則下列何者爲真

(A) $\log x$ 的首數爲 -1　(B) $\log x$ 的尾數爲 0.2345

(C) 小數 x 從小數點向右第 1 位出現非 0 之數字

(D) 小數 x 從小數點向右第一個出現非 0 之數字爲 1　(E) $\frac{1}{100} < x < \frac{1}{10}$

解析：　$\log x = -1.2345 = -2 + 0.7655$

$\therefore$ 首數爲 -2，尾數爲 0.7655，小數點後第二位出現非 0 之數字 k

$\because \log 5 = 0.6990$，$\log 6 = 0.7781$　$\therefore k = 5$

$\because -2 < \log x < -1$　$\therefore \frac{1}{100} < x < \frac{1}{10}$

5、(D)　$n \in N$，若 $\log n$ 的首數爲 7，則此種正整數 n 共有

(A) 1 (B) 7 (C) 9×10^6 (D) 9×10^7 (E) 9×10^8

解析：　$\log n$ 首數爲 7　$\therefore n$ 之位數爲 8 位數共 9×10^7 個

6、(C)　$n \in N$，若 $\log \frac{1}{n}$ 的首數爲 $-k$ ，則此種正整數 n 共有

(A) 1 (B) k (C) $9 \times 10^{k-1}$ (D) 9×10^k (E) $9 \times 10^{k+1}$

解析：　$\log \frac{1}{n}$ 之首數爲 $-k$　$\therefore -k \le \log \frac{1}{n} < -k + 1$

$k \ge \log n > k - 1$，$10^k \ge n > 10^{k-1}$ ，共 $10^k - 10^{k-1} = 9 \times 10^{k-1}$

二. 填充題

1、設 $n \in N$，$(n+1)^n$ 爲 8 位數，則 $n =$ ______ 。

答案：8

解析：$7 \le \log(n+1)^n < 8$　$\therefore 7 \le n\log(n+1) < 8$

$\because n \in N$　$\therefore 7 \times \log 8 < 7$ (不合)，$8 \times \log 9 = 7.6336$, $9 \times \log 10 = 9$ (不合)　$\therefore n = 8$

2、已知$\log 4.37=0.6405,\ \log 4.38=0.6415$，若$\log x=-2.3588$，則$x$之值爲______。

答案：4.377×10^{-3}

解析：$\log 4.370=0.6405$

$\log x=0.6412$

$\log 4.380=0.6415$

已內插法 $\dfrac{x}{10}=\dfrac{7}{10}$　$\therefore x=7$

$\log x=-3+0.6412=-3+\log 4.377=\log 4.377\times 10^{-3}$，$\therefore x=4.377\times 10^{-3}$

3、設$n\in N$，$n>2$，則比較$(2n)^n$與n^{2n}之大小，則較大者爲______。

答案：n^{2n}

解析：$n>2$，$\dfrac{n^{2n}}{(2n)^n}=\dfrac{n^n\cdot n^n}{2^n\cdot n^n}=(\dfrac{n}{2})^n>1$，　$\therefore n^{2n}>(2n)^n$　　$\therefore n^{2n}$較大

4、設$1<x<10$且$\log 2x$的尾數爲$\log x$之尾數的 3 倍，則$x=$______。

答案：$\sqrt{2}$或$\sqrt{20}$

解析：$\because 1<x<10$　　$\therefore 0<\log x<1$

$\log 2x-3\log x\in \boldsymbol{Z},\ \log x+\log 2-3\log x\in \boldsymbol{Z}$

$\log 2-2<\log 2-2\log x<\log 2\Rightarrow -1.699<\log 2-2\log x<0.3010$

$\therefore \log 2-2\log x=-1$或$\log 2-2\log x=0$　　$\therefore x=\sqrt{2}$或$\sqrt{20}$

5、若11^{40}爲 42 位數，且13^{60}爲 67 位數，則143^{10}爲______位數。

答案：22

解析：$41\le 40\log 11<42$，$10.25\le 10\log 11<10.5$

$66\le 60\log 13<67$，$11\le 10\log 13<11.1\overline{6}$

$21.25\le 10\log 143<21.\overline{6}$　　$\therefore 143^{10}$爲 22 位數

6、若$10^{0.8887}=7.74$，$10^{3.8882}=7730$，則$10^{-2.1117}=$______，又$10^x=77.34$，則$x=$______。

答案：0.007736, 1.8884

解析：$\log 7.74=0.8887$

$\log 7.73=0.8882$

設$\log 7.734=a$，$\log b=0.8883$

以內插法$\Rightarrow a=0.8884$　　$b=7.736$

$\log 10^{-2.1117}=-2.1117=-3+0.8883=-3+\log 7.736=\log 0.007736\Rightarrow 10^{-2.1117}=0.007736$

$10^x=77.34\Rightarrow x=\log 77.34=1.8884$　　$\therefore 10^{1.8884}=77.34$，$\therefore x=1.8884$

7、設$a,\ b\in N$，且$500<a<1000$，$100<b<1000$，若$\log a$之尾數爲$\log b$尾數的三倍，則$a=$______，$b=$______。

答案：800, 200

解析：$\because \log a-3\log b\in Z$，又$2<\log b<3$　　$\therefore$令$\log b=2+\alpha$　　$\log a=2+3\alpha$

$\therefore \log a-3\log b=-4\Rightarrow \log\dfrac{a}{b^3}=\log 10^{-4}$　　$\therefore 10^4\cdot a=b^3$　　$\therefore$設$a=k^3\times 10^2$，其中$k\in N$

$500 < k^3 \times 10^2 < 1000 \quad \therefore k = 2$ ， $a = 800$, $b = 200$

8、若 $(\frac{5^{10}}{7^{30}})$ 以小數表示時，小數點後第 m 位開始出現不爲 0 的數字 a，則 $m =$______， $a =$______。

答案：19, 4

解析： $\log(\frac{5^{10}}{7^{30}}) = -18.363 = -19 + 0.637$ ， $\therefore m = 19$, $\log 4 = 0.6020 < 0.637 < 0.6990 = \log 5$

$(\frac{5^{10}}{7^{30}}) = 4.\cdots \therefore a = 4$

9、 $2^{50} + 3^{25}$ 爲______位數的正整數。

答案：16

解析：$\log 2^{50} = 15.05$, $\log 3^{25} = 11.9275 \therefore 3^{25}$ 爲 12 位數，2^{50} 爲 16 位數，$\therefore 2^{50} + 3^{25}$ 亦爲 16 位數

10、一存款按年利率 20%複利計算，每年爲一期，則至少要______年(取整數年數)，其本利和才會超過本金的 3 倍。

答案：7

解析：本金爲 P, $P(1+20\%)^n > 3P \quad \therefore n\log 1.2 > \log 3$ ， $\therefore n > 6.03...$ ，至少要 7 年

11、 $\log x^2$ 之尾數與 $\log\frac{1}{x}$ 之尾數和爲 $\frac{5}{4}$ ，則 $\log x$ 之尾數爲______。

答案： $\frac{1}{4}$

解析：設 $\log x = n + \alpha \quad \therefore \log\frac{1}{x} = -\log x = -(n+\alpha) = -(n+1) + (1-\alpha)$ ， $\log x^2 = 2n + 2\alpha$

又尾數和爲 $\frac{5}{4}$

	$\log\frac{1}{x}$ 尾數	$\log x^2$尾數	
$\alpha = 0$	0	0	(不合)
$0 < \alpha < \frac{1}{2}$	$1-\alpha$	2α	$1-\alpha+2\alpha = \frac{5}{4} \quad \therefore \alpha = \frac{1}{4}$
$\frac{1}{2} \le \alpha < 1$	$1-\alpha$	$2\alpha - 1$	$1-\alpha+2\alpha-1 = \frac{5}{4} \quad \therefore \alpha = \frac{5}{4}$ (不合)

$\therefore \log x$ 之尾數爲 $\frac{1}{4}$

12、(1) $\log 1.125 =$______。(2)設 $S = 1 + (1.125) + (1.125)^2 + \cdots + (1.125)^{10}$ ，則 $\log(S+8) =$______。

答案：(1) 0.0512 (2) 1.4662

解析：(1) $\log 1.125 = \log\frac{9}{8} = 2\log 3 - 3\log 2 = 0.0512$ (2) $S = \frac{(1.125)^{11} - 1}{1.125 - 1} = 8 \times (1.125)^{11} - 8$

$\log(S+8) = \log[8 \times (1.125)^{11}] = \log 8 + 11 \times 0.0512 = 1.4662$

13、設 7^{50} 爲 n 位數之整數，其個位數字爲 k ，最高位數字爲 a ，則 $a =$______， $k =$______， $n =$______。

答案：1, 9, 43

解析：$\log 7^{50}=50\times 0.8451=42.255$，$\because \log 1<0.255<\log 2$　$\therefore a=1$，$n=43$

$\because$

$7^1\Rightarrow 7;7^2\Rightarrow 9;7^3\Rightarrow 3;7^4\Rightarrow 1$

$7^5\Rightarrow 7;7^6\Rightarrow 9;7^7\Rightarrow 3;7^8\Rightarrow 1$,

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$50\div 4=12\cdots\cdots 2\Rightarrow 7^2\Rightarrow 9$

$\therefore k=9$

三. 計算與證明題

1、$N=[\dfrac{(28.44)^2\sqrt{0.5828}}{345.6}]^{\frac{1}{3}}$，求 N 之值？

答案：
$$\log N=\frac{1}{3}(2\log 28.44+\frac{1}{2}\log 0.5828-\log 345.6)$$
$$=\frac{1}{3}[2(1+0.4539)+\frac{1}{2}(-1+0.7655)-(2+05386)]$$
$$=\frac{1}{3}(2.9078-0.11725-2.5386)\quad =0.0840$$

故 $N\fallingdotseq 1.2133$。

2、志明參加郵局零存整付之儲蓄存款，每月月初須付 10000 元，若依年利率 6%複利計算，每月爲 1 期，存滿 2 年後，本利和共有多少元？

$\log 1.005=0.0021$，$\log 1.06=0.253$；$\log 1.12=0.0492$，$\log 1.13=0.0532$

答案：$10000\times(1+\dfrac{5}{1000})^{24}+10000\times(1+\dfrac{5}{1000})^{23}+\cdots+10000\times(1+\dfrac{5}{1000})^{1}$

$$=\frac{10000\times 1.005\times[(1.005)^{24}-1]}{1.005-1}=2010000\times[(1.005)^{24}-1]$$

$\log\left(1.005\right)^{24}=24\times\log(1.005)=0.0504$，由內插法 $\left(\begin{array}{l}\log 1.12=0.0492\\ \log k=0.0504\\ \log 1.13=0.0532\end{array}\right)\therefore\Rightarrow k=1.123$

$\therefore\left(1.005\right)^{24}\fallingdotseq 1.123$　$\therefore$總和爲 247230 元

4、(1) $\log(2.16)=$？(2)設 $n\in N$，若 $(2.16)^n$ 的整數部分爲 3 位數，則合於條件之所有 n 之和爲何？

答案：(1) $\log 2.16=\log\dfrac{216}{100}=3(\log 2+\log 3)-2=0.3343$

(2) $2\le n\log 2.16<3\Rightarrow\dfrac{2}{\log 2.16}\le n<\dfrac{3}{\log 2.16}$，$5.9\le n<8.9$，$\Rightarrow n=6, 7, 8$　$\Rightarrow 6+7+8=21$

5、設 $10<x<100$ 且 $\log x^2$ 的尾數爲 $\log\dfrac{1}{x}$ 的尾數的 3 倍，則 $x=$？

答案：$10<x<100$，$\log x=1+\alpha$，$0<\alpha<1$

$\log x^2=2\log x=2+2\alpha$，$\log\dfrac{1}{x}=-1-\alpha$

若$0<\alpha<\frac{1}{2}$，則$2\alpha=3(1-\alpha)$， $\therefore \alpha=\frac{3}{5}$ (不合)

若$\frac{1}{2}\le\alpha<1$，則$2\alpha-1=3(1-\alpha)$， $\therefore \alpha=\frac{4}{5}$，$\therefore x=10^{\frac{9}{5}}$

6、設$a=\sqrt[3]{\frac{4.21\times 0.013}{71.9}}$，又知$\log 4.21=0.6243$，$\log 1.3=0.1139$，$\log 7.19=0.8567$，則$\log a=$？

又利用下表求$a=$？

常用對數表 $y=\log_{10} x$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	表尾差								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
…	….	….	….	….	….	….	….	…..	….	….	…	…	…	…	…	…	..	…	..
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

答案：$\log a=\frac{1}{3}[0.6243+0.1139-2-1-0.8567]=-1.0395=-2+0.9605$

$\log a=-2+\log 9.13 \Rightarrow a=0.00913$