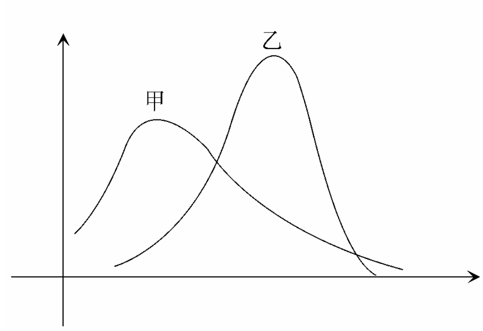
<table>
<tr><td colspan="6">高雄市明誠中學 高二數學平時測驗　　日期：93.06.19</td></tr>
<tr><td rowspan="2">範圍</td><td rowspan="2">3-7 離差+ANS</td><td>班級</td><td></td><td rowspan="2">姓名</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>座號</td><td></td></tr>
</table>

一、選擇題(每題 10 分)

1. 常態分布曲線有哪些特性？(複選)
   (A)對稱性　(B)不連續性　(C)中位數等於算術平均數　(D)全體資料中與算術平均數之差小於一個標準差的比率不超過全體的$\frac{1}{2}$

答案：(A)(C)

2. 某次考試甲、乙兩科成績的直方圖如下（因考生人數多，所以成績分布的直方圖可視為平滑曲線），試判斷下列哪些敘述是正確的？(複選)
   (A)甲班的算術平均數較乙的算術平均數大
   (B)甲的中位數比乙的中位數大
   (C)甲的全距比乙的全距大　(D)甲的標準差比較大



答案：(C)(D)

3. 設某班有 45 人，這學期兩次期中考的數學成績，每位同學第二次都比第一次多 5 分，下列各數值恆不變的有？(複選)
   (A)算術平均數　(B)第三四分位數　(C)全距　(D)四分位差　(E)標準差

答案：(C)(D)(E)

二、填充題(每題 10 分)

4.甲班 50 名學生期末考數學成績統計如下。試求：

分數	30～40	40～50	50～60	60～70	70～80	80～90	90～100
人數	3	7	9	13	10	6	2

(1)算術平均數 ＝＿＿＿＿＿＿分。　(2)中位數Me＝＿＿＿＿＿＿分。

(3)樣本標準差S＝＿＿＿＿＿＿分。（$S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}-\frac{1}{n}(\bar{x})^2}{n-1}}$）

答案：(1) 64.2　(2) $64\frac{8}{13}$　(3) $=\frac{\sqrt{11568}}{7}$

解析：

分數	f_i	以下累積	組中點 x_i	x_i-65	$d_i=\frac{x_i-65}{10}$	d_i^2	$f_i d_i$	$f_i d_i^2$
30～40	3	3	35	－30	－3	9	－9	27
40～50	7	10	45	－20	－2	4	－14	28
50～60	9	19	55	－10	－1	1	－9	9
60～70	13	32	65	0	0	0	0	0
70～80	10	42	75	10	1	1	10	10
80～90	6	48	85	20	2	4	12	24
90～100	2	50	95	30	3	9	6	18
合計							－4	116

(1)算術平均數 $=65+\dfrac{-4}{50}\times 10=64.2$

(2)中位數 $Me=60+\dfrac{\frac{50}{2}-19}{13}\times 10=\ 64\dfrac{8}{13}$

(3)樣本標準差 $S=h\sqrt{\dfrac{1}{n-1}[\sum f_i d_i^{\ 2}-\dfrac{1}{n}(\sum f_i d_i)^2]}=10\sqrt{\dfrac{1}{49}[116-\dfrac{1}{50}\times(-4)^2]}=\dfrac{\sqrt{11568}}{7}$

5. 將 40 個數值資料平分成A，B兩組，已知A組的算術平均數爲 5，變異數爲 3；B組的算術平均數爲 7，變異數爲 1，則此 40 個資料的算術平均數爲__________，變異數爲______。

答案：6；$\dfrac{116}{39}$

解析：

(1) $\bar{x}\ =\dfrac{5\times 20+7\times 20}{40}=6$

(2) $\because\quad S_A^{\ 2}=\dfrac{1}{19}\sum_{i=1}^{20}x_i^{\ 2}-\dfrac{20}{19}\overline{x_A}^2\quad\therefore\quad 3=\dfrac{1}{19}\sum_{i=1}^{20}x_i^{\ 2}-\dfrac{20}{19}\times 5^2$

$\Rightarrow\quad \sum_{i=1}^{20}x_i^{\ 2}=57+500=557$，又$S_B^{\ 2}=\dfrac{1}{19}\sum_{i=1}^{20}y_i^{\ 2}-\dfrac{20}{19}\overline{x_B}^2$

$\therefore\quad 1=\dfrac{1}{19}\sum_{i=1}^{20}y_i^{\ 2}-\dfrac{20}{19}\times 7^2\quad\Rightarrow\quad \sum_{i=1}^{20}y_i^{\ 2}=999\quad\therefore$ 全部 40 個數的變異數

$S^2=\dfrac{1}{39}(\sum_{i=1}^{20}x_i^{\ 2}+\sum_{i=1}^{20}y_i^{\ 2})-\dfrac{40}{39}\bar{x}^2=\dfrac{1}{39}\ (557+999)-\dfrac{40}{39}\times 36=\ \dfrac{116}{39}$

6 設n個數值資料x_1，x_2，⋯，x_n之算術平均數爲 5，標準差爲 4，則

(1) $-3x_1+5$，$-3x_2+5$，⋯，$-3x_n+5$ 之標準差爲$S_Y=$___________。

(2)若 $3x_1^{\ 2}-5$，$3x_2^{\ 2}-5$，⋯，$3x_n^{\ 2}-5$ 之算術平均數爲a_n，則$\lim\limits_{n\to\infty}a_n\ =$___________。

答案：(1) 12　(2) 118

解析：

(1)令$Y=-3X+5$，則$S_Y=|-3|\,S_X=3S_X=3\times 4=12$

(2)令$Z=3X^2-5$，則$\bar{z}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(3x_i^{\ 2}-5)=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(3x_i^{\ 2})-\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}5=\dfrac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^{\ 2}-5$

又$S_X^{\ 2}=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}x_i^{\ 2}-\dfrac{n}{n-1}\bar{x}^2\quad\Rightarrow\quad 4^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}x_i^{\ 2}-\dfrac{n}{n-1}5^2$

$\Rightarrow\quad 16(n-1)=\sum_{i=1}^{n}x_i^{\ 2}-25n\quad\therefore\quad \sum_{i=1}^{n}x_i^{\ 2}=41n-16$

故$\bar{z}=\dfrac{3}{n}(41n-16)-5=123-\dfrac{16}{n}\ -5=118-\dfrac{16}{n}=a_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}(118-\dfrac{16}{n})\ =118$

7 有 40 位學生體重次數分布表如下：（單位：公斤）

體重	45～50	50～55	55～60	60～65	65～70	70～75	75～80	80～85
人數	1	7	17	4	3	6	1	1

則

(1)第一個四分位數$Q_1=$___________。　(2)第三個四分位數$Q_3=$___________。

(3)四分位差$Q.D.=$___________。　(4)算術平均數$M=$___________。

(5)標準差$S=$___________。

答案：(1) $55\frac{10}{17}$　(2) $66\frac{2}{3}$　(3) $11\frac{14}{51}$　(4) 61　(5) $5\sqrt{\frac{512}{195}}$

解析：製作次數分布表如下：平移值$A = 62.5$，組距$h = 5$

	體重	組中點 x_i	次數 f_i	以下累積次數 C_i	$x_i - A$	$\frac{x_i - A}{h} = d_i$	$f_i d_i$	d_i^2	$f_i d_i^2$
	45～50	47.5	1	1	– 15	– 3	– 3	9	9
	50～55	52.5	7	8	– 10	– 2	– 14	4	28
Q_1→	55～60	57.5	17	25	– 5	– 1	– 17	1	17
	60～65	62.5	4	29	0	0	0	0	0
Q_3→	65～70	67.5	3	32	5	1	3	1	3
	70～75	72.5	6	38	10	2	12	4	24
	75～80	77.5	1	39	15	3	3	9	9
	80～85	82.5	1	40	20	4	4	16	16
	總計		40				– 12		106

(1) Q_1為第 $\frac{40}{4} = 10$ 個數值位在 55～60 內

$\therefore\ \frac{Q_1 - 55}{60 - 55} = \frac{10 - 8}{25 - 8} \Rightarrow Q_1 = 55 + \frac{10 - 8}{17} \times 5 = 55\frac{10}{17}$

(2) Q_3為第 $\frac{3 \times 40}{4} = 30$ 個數值位在 65～70 內

$\therefore\ \frac{Q_3 - 65}{70 - 65} = \frac{30 - 29}{32 - 29} \Rightarrow Q_3 = 65 + \frac{30 - 29}{3} \times 5 = 66\frac{2}{3}$

(3) $Q.D. = Q_3 - Q_1 = 66\frac{2}{3} - 55\frac{10}{17} = 11\frac{14}{51}$

(4)算術平均數$M = A + \frac{h}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i d_i = 62.5 + \frac{-12}{40} \times 5 = 62.5 + \frac{-3}{2} = 62.5 - 1.5 = 61$

(5) $S = h\sqrt{\frac{1}{n-1}[\sum_{i=1}^{k} f_i d_i^2 - \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{k} f_i d_i)^2]} = 5 \times \sqrt{\frac{1}{39}[106 - \frac{1}{40} \times (-12)^2]} = 5\sqrt{\frac{512}{39 \times 5}} = 5\sqrt{\frac{512}{195}}$

8 設變數X的數值資料為 7，13，9，6，12，18，16，15 等 8 個，則

(1)算術平均數 $\overline{x} =$ ＿＿＿＿＿＿。　(2)中位數$Me =$ ＿＿＿＿＿＿。

(3)四分位差$Q.D. =$ ＿＿＿＿＿＿。　(4)標準差$S =$ ＿＿＿＿＿＿。

答案：(1) 12　(2) 12.5　(3) 7.5　(4) $\sqrt{\frac{132}{7}}$

解析：為了計算方便可先作平移變量，$Y = X - 12$（平移值$A = 12$）

X：6，7，9，12，13，15，16，18，Y：– 6，– 5，– 3，0，1，3，4，6

(1) $\overline{y} = \frac{1}{8}(-6 - 5 - 3 + 0 + 1 + 3 + 4 + 6) = 0 \Rightarrow \overline{x} = \overline{y} + 12 = 0 + 12 = 12$

(2) $Me = \frac{12 + 13}{2} = \frac{25}{2} = 12.5$（$x$值最中間兩個數的平均值）

(3) X：6　7　9　12　13　15　16　18

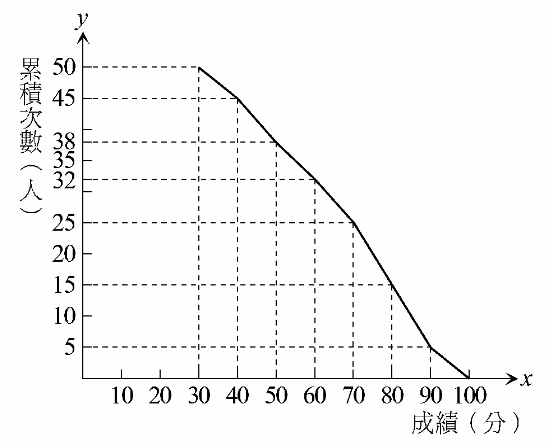
$$\begin{array}{cccccccc} 6 & 7 & 9 & 12 & 13 & 15 & 16 & 18 \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & Q_1 & & Me & & Q_3 & & \end{array}$$

$\because\quad Q_1=\dfrac{7+9}{2}=8$，$Q_3=\dfrac{15+16}{2}=15.5\quad\therefore\quad Q.D.=Q_3-Q_1=15.5-8=7.5$

(4)$\because\quad S_Y=\sqrt{\dfrac{1}{8-1}[(-6)^2+(-5)^2+(-3)^2+0^2+1^2+3^2+4^2+6^2]-\dfrac{8}{8-1}(\bar{y})^2}$

$=\sqrt{\dfrac{1}{7}(36+25+9+0+1+9+16+36)}=\sqrt{\dfrac{132}{7}}$ ，　$S_X=S_Y=\sqrt{\dfrac{132}{7}}$

9 某班某月英文成績之累積次數分布曲線如下：（採相同組距 10 且不含上限），求



(1)全距__________分。　(2)中位數__________分。　(3)算術平均數__________分。

(4)四分位差__________分。(5)標準差__________。

答案：(1) 70　(2) 70　(3) 67　(4) $31\dfrac{2}{3}$　(5) $\dfrac{10\sqrt{172}}{7}$

解析：

組別	以上累積次數	次數 f_i
30～40	50	5
40～50	45	7
50～60	38	6
60～70	32	7
70～80	25	10
80～90	15	10
90～100	5	5

(1)全距 $=100-30=70$

(2)$\because\quad f_i$中，由下而上累加得 $5+10+10=25$

剛好爲 $\dfrac{50}{2}$，表 70 分以上有 25 人，故$Me=70$

(3)　　　　　　　　　　　　　　　（$A=75$）

組別	組中點 x_i	次數 f_i	C_i	$d_i=\dfrac{x_i-A}{h}$	f_id_i	d_i^2	$f_id_i^2$
30～40	35	5	5	-4	-20	16	80
40～50	45	7	12	-3	-21	9	63
50～60	55	6	18	-2	-12	4	24
60～70	65	7	25	-1	-7	1	7
70～80	75	10	35	0	0	0	0
80～90	85	10	45	1	10	1	10
90～100	95	5	50	2	10	4	20
總計		50			-40		204

令$A=75$，$h=10$　$\therefore$　$\bar{x}=75+\dfrac{h}{n}\sum_{i=1}^{7}f_id_i=75+\dfrac{10}{50}\times(-40)=67$

(4)①$\because$　由次數f_i那一欄由上往下累加，$5+7+6=18>\dfrac{50}{4}$

第一四分位數Q_1落在 50～60 之間，$\dfrac{Q_1-50}{60-50}=\dfrac{\frac{50}{4}-12}{18-12}$　$\Rightarrow$　$Q_1=50+\dfrac{5}{6}=50\dfrac{5}{6}$

②$\because$　$5+7+6+7+10+10=45>3\times\dfrac{50}{4}=37.5$

$\therefore$　第三四分位數Q_3落在 80～90 之間，$Q_3=80+10\times\dfrac{\frac{150}{4}-35}{45-35}=80+\dfrac{10}{4}=82\dfrac{1}{2}$

故四分位差$Q.D.=Q_3-Q_1=82\dfrac{1}{2}-50\dfrac{5}{6}=31\dfrac{2}{3}$

(5) $S^2=\dfrac{1}{49}[\sum_{k=1}^{50}x_k^{\ 2}-\dfrac{1}{50}(\sum_{k=1}^{50}x_k)^2]\times10^2=\dfrac{1}{49}[204-\dfrac{1}{50}(40)^2]\times10^2=\dfrac{1}{49}[20400-3200]$

$\therefore$　$S=\dfrac{10\sqrt{172}}{7}$

10.21 個數值，其算術平均數爲 32，標準差爲 3。今發現其中數「35」必須刪除，求所剩 20 個數值之變異數。

答案：8.98

解析：

設此 21 個數值爲x_1，x_2，$\cdots$，x_{20}，x_{21}，其中$x_{21}=35$

$\sum_{k=1}^{21}x_k=32\times21=672$，又$x_{21}=35$　$\therefore$　$\sum_{k=1}^{20}x_k=672-35=637$

又由標準差爲 3 可得 $3^2=\dfrac{1}{20}[\sum_{k=1}^{21}x_k^{\ 2}-\dfrac{1}{21}(\sum_{k=1}^{21}x_k)^2]$

$\therefore$　$\sum_{k=1}^{21}x_k^{\ 2}=3^2\times20+\dfrac{1}{21}(672)^2=21684$　$\therefore$　$\sum_{k=1}^{20}x_k^{\ 2}=21684-35^2=20459$

所求變異數 $=\dfrac{1}{19}[\sum_{k=1}^{20}x_k^{\ 2}-\dfrac{1}{20}(\sum_{k=1}^{20}x_k)^2]=\dfrac{1}{19}[20459-\dfrac{1}{20}\times(637)^2]=\dfrac{409180-405769}{380}=\dfrac{3411}{380}$

11.有 10 人在某次考試中，得到平均分數 56 分，標準差爲$\dfrac{4\sqrt{10}}{3}$，若 10 個人中有 8 個人得

分是 50，52，53，54，56，57，60，61，試求其餘 2 人的得分。

答案：54，63

解析：設此二人得分為x，y

$x+y+50+52+53+54+56+57+60+61=56\times 10 \quad \Rightarrow \quad x+y=117$⋯⋯①

又$(\dfrac{4\sqrt{10}}{3})^2=\dfrac{1}{9}[\sum_{k=1}^{10}(x_k-\overline{X})^2]$

$\Rightarrow \quad \dfrac{160}{9}=\dfrac{1}{9}[(x-56)^2+(y-56)^2+36+16+9+4+1+16+25]$

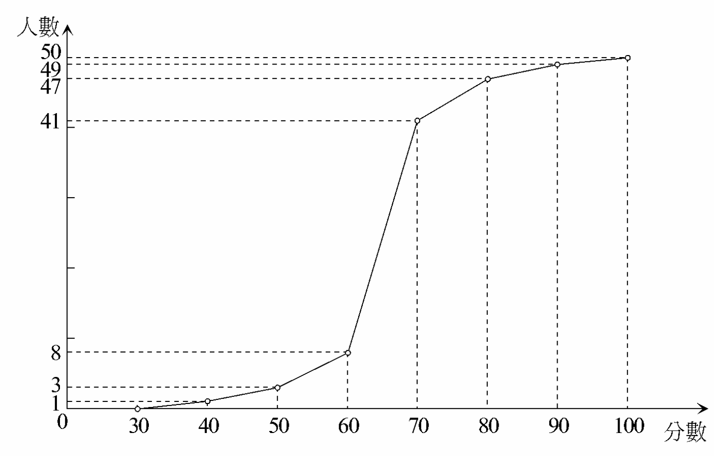
$\Rightarrow \quad (x-56)^2+(y-56)^2=53$⋯⋯②

由①②解得$(x，y)=(54，63)$或$(63，54)$

12.某次數學測驗，全班 50 位同學成績的以下累積次數分布表如下圖，試求此測驗的

(1)平均分數$\overline{x}$為何（小數第二位四捨五入到小數第一位）？

(2)標準差$S=\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n}}$為何（小數第二位四捨五入到小數第一位）？



答案：(1) 65.2　(2) $\dfrac{\sqrt{4498}}{7}$

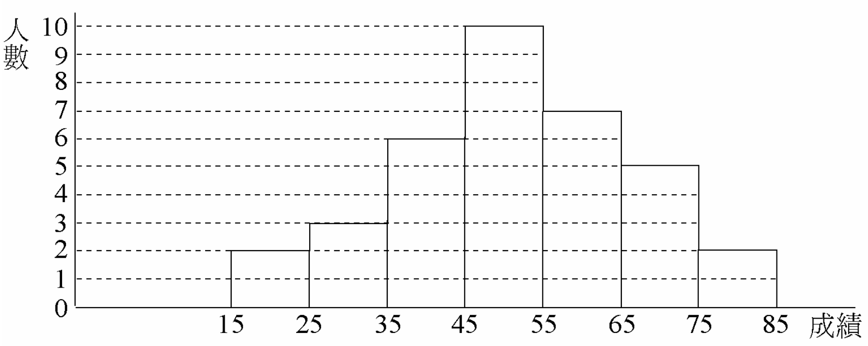
解析：

分數	次數 f_i	組中點 x_i	$d_i=\dfrac{x_i-65}{10}$	f_id_i	d_i^2	$f_id_i^2$
30～40	1	35	-3	-3	9	9
40～50	2	45	-2	-4	4	8
50～60	5	55	-1	-5	1	5
60～70	33	65	0	0	0	0
70～80	6	75	1	6	1	6
80～90	2	85	2	4	4	8
90～100	1	95	3	3	9	9
總計	50			1		45

(1) $\overline{x}=65+\dfrac{10}{50}\cdot 1=65.2$

(2) $S=10\sqrt{\dfrac{1}{50-1}\cdot[45-\dfrac{1}{50}(1)^2]}=\dfrac{\sqrt{4500-2}}{7}=\dfrac{\sqrt{4498}}{7}$

13.某校高二學生在一次月考之後，抽出 35 個學生，統計他們的成績，畫出成績直方圖，如下：



(1)求中位數。　(2)求標準差。

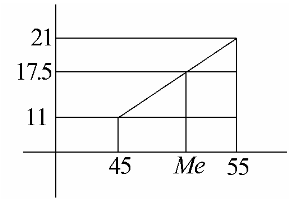
答案：(1) 51.5　(2) $10\sqrt{\frac{281}{119}}$

解析：

35 個同學的成績分布表如下

成績	人數	組中點 x_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$	累積次數
15～25	2	20	40	800	2
25～35	3	30	90	2700	5
35～45	6	40	240	9600	11
45～55	10	50	500	25000	21
55～65	7	60	420	25200	28
65～75	5	70	350	24500	33
75～85	2	80	180	12800	35
合計	35		1800	100600	

(1)中位數：在 45～55 這一組裡，用內插法求之



$$\frac{Me-45}{55-45}=\frac{17.5-11}{21-11} \quad \Rightarrow \quad Me=45+\frac{\frac{35}{2}-11}{10}\times 10=51.5$$

(2)標準差S_X

$$=\sqrt{\frac{1}{34}[\sum_{i=1}^{7} f_i x_i^2-\frac{1}{35}(\sum_{i=1}^{7} f_i x_i)^2]}=\sqrt{\frac{1}{34}[100600-\frac{1}{35}(1800)^2]}=\sqrt{\frac{100600\times 35-1800^2}{34\times 35}}=10\sqrt{\frac{281}{119}}$$

14.求 3123，3125，3119，3122，3126 之算術平均數與標準差。

答案：3123；$\frac{\sqrt{30}}{2}$

解析：

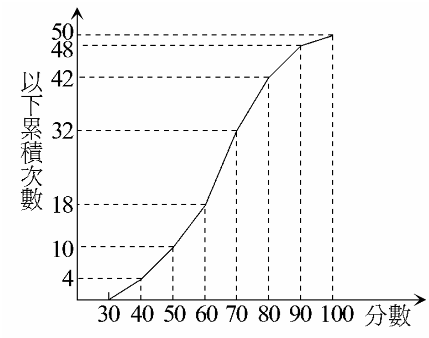
$$\bar{x}=3120+\frac{1}{5}(3+5-1+2+6)=3120+3=3123$$

先把每個數值資料減去 3123，得 0，2，－4，－1，3，$\bar{x}=0$

$$S^2 = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{5}(x_k - \bar{x})^2 = \frac{1}{4}(0+4+16+1+9) = \frac{30}{4}，\therefore\ S = \frac{\sqrt{30}}{2}$$

15.下圖是某班 50 位同學第二次月考數學成績的以下累積分布曲線圖（不含上限），求

(1)算術平均數 $\bar{x}$。 (2)中位數 Me。 (3)四分位差 $Q.D.$。 (4)標準差 S。



答案：(1) 64.2 (2) 65 (3) 22.375 (4) 15.63

解析：

將以下累積次數分布圖轉換成次數分布表如下：平移值$A = 65$，組距$h = 10$

	體重	以下累積次數 C_i	次數 f_i	組中點 x_i	$x_i - A$	$\frac{x_i - A}{h}$	$f_i d_i$	d_i^2	$f_i d_i^2$
	30～40	4	4	35	– 30	– 3	– 12	9	36
	40～50	10	6	45	– 20	– 2	– 12	4	24
Q_1→	50～60	18	8	55	– 10	– 1	– 8	1	8
Me→	60～70	32	14	65	0	0	0	0	0
Q_3→	70～80	42	10	75	10	1	10	1	10
	80～90	48	6	85	20	2	12	4	24
	90～100	50	2	95	30	3	6	9	18
	總計		50				– 4		120

(1) $\bar{x} = A + \frac{h}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i d_i = 65 + \frac{10}{50}\times(-4) = 64.2$

(2)$\because\ \frac{n}{2} = 25\quad \therefore\ Me$落在 60～70 這一組內，$C_{i-1} = 18$，$f_i = 14$

由$Me = L_i + \dfrac{\frac{n}{2} - C_{i-1}}{f_i}(U_i - L_i) = 60 + \dfrac{25-18}{14}\times 10 = 65$

(3)$\because\ Q_1$位在 50～60 這一組內

$\therefore\ Q_1 = 50 + \dfrac{\frac{50}{4} - 10}{8}\times 10 = 50 + \dfrac{2.5}{8}\times 10 = 50 + 3.125 = 53.125$

又Q_3位在 70～80 這一組內 $\therefore\ Q_3 = 70 + \dfrac{\frac{150}{4} - 32}{10}\times 10 = 70 + \dfrac{11}{20}\times 10 = 75.5$

故四分位差$Q.D. = Q_3 - Q_1 = 75.5 - 53.125 = 22.375$

(4)標準差$S_X = h\sqrt{\frac{1}{n-1}[\sum_{i=1}^{k} f_i d_i^2 - \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{k} f_i d_i)^2]} =$

$10\sqrt{\frac{1}{49}\times[120-\frac{1}{50}\times(-4)^2]}=\frac{\sqrt{12000-32}}{7}=\frac{\sqrt{11968}}{7}$

16.某班數學平時測驗成績及其次數分布如下：

成績	40	50	60	70	80	90	100
人數	1	3	6	8	20	10	2

試求：

(1)算術平均數 $\bar{x}$。　(2)中位數 Me。　(3)四分位差 $Q.D.$。　(4)標準差 S。

答案：(1) 76.2　(2) 80　(3) 10　(4) 13.2

解析：

(1) $\bar{x}=\frac{1}{50}(40\times 1+50\times 3+60\times 6+70\times 8+80\times 20+90\times 10+100\times 2)=76.2$

(2) 50 人的成績由小而大排列之最中間兩位是第 25 人及第 26 人的成績都是 80 分

$\therefore$　中位數 $Me=\frac{1}{2}(80+80)=80$

(3) 50 人的成績由小而大排列之

在 Me 之前有 25 人，最中間一位爲第 13 位，在 Me 之後有 25 人，最中間一位爲第 38 位

其成績分別爲 $Q_1=70$ 分，$Q_3=80$ 分　$\therefore$　$Q.D.=Q_3-Q_1=80-70=10$（分）

(4)令 $y=\frac{x-80}{10}$，則

x	40	50	60	70	80	90	100
y	-4	-3	-2	-1	0	1	2
人數	1	3	6	8	20	10	2

$\because$　$\bar{x}=76.2$　$\therefore$　$\bar{y}=\frac{1}{10}\bar{x}-8=-0.38$

$\because$　$S_X=10\,S_Y=10\sqrt{\frac{1}{49}[(16\times1+9\times3+4\times6+1\times8+0\times20+1\times10+4\times2)-50(-0.38)^2]}$

$=10\sqrt{\frac{1}{49}\times[93-50\times0.1444]}=\frac{\sqrt{9300-722}}{7}=\frac{\sqrt{8578}}{7}$ 。