高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：93.05.21					
範圍	3-3 期望值+ANS	班級		姓名	
		座號			

一、填充題(每題 10 分)

1. 一袋中有 1 號球 1 個，2 號球 2 個，3 號球 3 個，4 號球 4 個，

   (1)從袋中任取一球，若取到k號球可得 $5-k$元，則此試驗得獎金的期望值為________元。

   (2)從袋中一次取兩球，取到的號碼和為k時，可得 $10-k$元，則此試驗得獎金的期望值為______元。

答案：(1) 2　(2) 4

解析：

(1)袋中球的總數 $=1+2+3+4=10$，此試驗得獎金的機率分布如下

獎金 X	4	3	2	1
機率	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$

故得獎金的期望值 $E(X)=4\times\frac{1}{10}+3\times\frac{2}{10}+2\times\frac{3}{10}+1\times\frac{4}{10}=2$（元）

$\boxed{\text{速解：} 5-\frac{1\times1+2\times2+3\times3+4\times4}{1+2+3+4}=2\text{（元）}}$

(2)一次取兩球，設此試驗得獎金的金額為 X 元，則機率分布如下

X	7	6	5	4	3	2
機率	$\frac{2}{C_2^{10}}$	$\frac{4}{C_2^{10}}$	$\frac{10}{C_2^{10}}$	$\frac{11}{C_2^{10}}$	$\frac{12}{C_2^{10}}$	$\frac{6}{C_2^{10}}$

故得獎金的期望值 $E(X)=7\times\frac{2}{45}+6\times\frac{4}{45}+5\times\frac{10}{45}+4\times\frac{11}{45}+3\times\frac{12}{45}+2\times\frac{6}{45}=\frac{180}{45}=4$（元）

2. 五骰子投擲一次，若五骰子同點，則可得 1200 元，若恰四骰子同點，則可得 600 元，則投擲一次之期望值為__________元。

答案：$\frac{25}{2}$

解析：

獎金	1200	600
機率	$6\times(\frac{1}{6})^5$	$C_1^6\times C_1^5\times\frac{5\,!}{4\,!}\times(\frac{1}{6})^5$

xxxxy

$\therefore$　期望值為 $1200\times(\frac{1}{6})^4+600\times\frac{25}{6^4}=\frac{25}{2}$ 元

3. 將 5 個大小形狀相同，顏色不同的球，全投入 3 個不同的袋子中，則

   (1)每個袋子中均有球的機率為__________。　(2)空袋子個數的期望值為__________個。

答案：(1) $\frac{50}{81}$　(2) $\frac{32}{81}$

解析：

5 個不同顏色的球放入 3 個不同的袋子中，其放入法有 $3^5=243$ 種

(1)每個袋子均有球，依個數安排可分成兩類$\begin{cases}(3,1,1)\\(2,2,1)\end{cases}$

故放法有$\dfrac{C_3^5\times C_1^2\times C_1^1}{2\,!}\times 3\,!+\dfrac{C_2^5\times C_2^3\times C_1^1}{2\,!}\times 3\,!=60+90=150$

$\therefore$ 所求機率為$\dfrac{150}{243}=\dfrac{50}{81}$

(2)

空袋子個數	0	1	2
機　　率	$\dfrac{150}{243}$	$\dfrac{90}{243}$	$\dfrac{3}{243}$

$\therefore$ 空袋子個數的期望值$=0\times\dfrac{150}{243}+1\times\dfrac{90}{243}+2\times\dfrac{3}{243}=\dfrac{96}{243}=\dfrac{32}{81}$

4. 6 個不同的球，任意放入 3 個不同的箱子，每箱個數不限，

(1)恰有一個空箱子的機率為__________。 (2)空箱子個數的期望值為__________。

答案：(1)$\dfrac{62}{243}$ (2)$\dfrac{64}{243}$

解析：

6 個不同的球，放入 3 個不同箱子，每箱個數不限

(1)恰有一個空箱子 $\Rightarrow$ 任意一個箱子為空箱，共餘每箱至少 1 個

所求機率$=\dfrac{C_1^3\cdot(2^6-2)}{3^6}=\dfrac{3\cdot 62}{729}=\dfrac{62}{243}$

(2)恰有二個空箱子之機率$=\dfrac{C_2^3\cdot 1}{3^6}=\dfrac{1^6}{243}$

所求空箱子個數的期望值$=1\cdot\dfrac{62}{243}+2\cdot\dfrac{1}{243}=\dfrac{64}{243}$

5. 同時擲三粒公正的骰子，求

(1)三粒骰子的點數均相同時，可得 300 元；恰有兩粒點數相同時，可得 200 元，則其期望值為__________元。

(2)出現最大點數的期望值為__________。

答案：(1)$\dfrac{275}{3}$ (2)$\dfrac{119}{24}$

解析：

(1) $E=300\cdot\dfrac{6}{6^3}+200\cdot\dfrac{C_2^3P_2^6}{6^3}=\dfrac{1800+18000}{216}=\dfrac{275}{3}$(三次挑 2 次給二同，6 個點數一個給 2 同，另一點數給另一次)

(2) $E=1\cdot\dfrac{1}{6^3}+2\cdot\dfrac{2^3-1^3}{6^3}+3\cdot\dfrac{3^3-2^3}{6^3}+4\cdot\dfrac{4^3-3^3}{6^3}+5\cdot\dfrac{5^3-4^3}{6^3}+6\cdot\dfrac{6^3-5^3}{6^3}$

$=\dfrac{1+14+57+148+305+546}{216}=\dfrac{119}{24}$

6. 投擲一公正的骰子一次，則出現點數的期望值 $=$__________；又同時投擲兩公正的骰子，則出現點數和的期望值 $=$__________。

答案：$\frac{7}{2}$；7

解析：

(1)

點數	1	2	3	4	5	6
機率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

故投擲一公正骰子出現點數的期望值爲

$$1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}$$

速解：$\frac{1+2+3+4+5+6}{6}=\frac{7}{2}$

(2)

投擲兩公正骰子

點數和	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
機率	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

投擲兩公正骰子點數和的期望值

$$=2\times\frac{1}{36}+3\times\frac{2}{36}+4\times\frac{3}{36}+5\times\frac{4}{36}+6\times\frac{5}{36}+7\times\frac{6}{36}+8\times\frac{5}{36}+9\times\frac{4}{36}+$$

$$10\times\frac{3}{36}+11\times\frac{2}{36}+12\times\frac{1}{36}$$

$$=\frac{252}{36}=7$$

速解：投擲兩公正骰子點數和的期望值 $=\frac{7}{2}\times 2=7$

7. A袋中有 100 元 5 張，10 元 3 張，1 元 4 張，B袋中有 10 元鈔票 10 張，

(1)自A袋中任取二張，其期望值爲__________。

(2)自A袋中取一張放入B袋，再自B袋取二張，求期望值爲__________。

答案：(1) 89　(2) $\frac{289}{11}$

解析：

(1) $E=2(100\times\frac{5}{12}+10\times\frac{3}{12}+1\times\frac{4}{12})=89\Leftarrow$ 速解：$\frac{100\times5+10\times3+1\times4}{5+3+4}\times2=89$

(2) $E=2(\frac{89}{2}\times\frac{1}{11}+10\times\frac{10}{11})=2\times\frac{289}{22}=\frac{289}{11}$

8. 設擲一骰子三次，則

(1)出現 6 點次數的期望值爲__________。　(2)出現質數點次數的期望值爲__________。

答案：(1)$\frac{1}{2}$　(2)$\frac{3}{2}$

解析：

(1)擲一骰子三次，設 X 表示出現 6 點的次數，則其機率分布

X	0	1	2	3
機率	$\frac{5^3}{216}$	$\frac{3\times5^2}{216}$	$\frac{3\times5}{216}$	$\frac{1}{216}$

期望值 $E(X)=1\times\frac{75}{216}+2\times\frac{15}{216}+3\times\frac{1}{216}=\frac{108}{216}=\frac{1}{2}$

速解：$\frac{1}{6}\times3=\frac{1}{2}$　(六面中只有一個 6)

(2)設出現質數點(2、3、5)的次數以 X 表示，則其機率分布

X	0	1	2	3
機率	$\frac{3^3}{216}$	$\frac{C_1^3\times3\times3^2}{216}$	$\frac{C_2^3\times3^2\times3}{216}$	$\frac{3^3}{216}$

期望值 $E(X)=1\times\frac{81}{216}+2\times\frac{81}{216}+3\times\frac{27}{216}=\frac{324}{216}=\frac{3}{2}$

速解：$\frac{3}{6}\times3=\frac{1}{2}$　(六面中有 3 個質數)

9. 一盒子中有 5 個球，球上分別編號爲 1，2，3，4，5，且每球被取的機率相同，

(1)若一次取兩球，則兩球中編號較大者的期望值爲__________。

(2)若一次取兩球，則兩球編號差之平方的期望值爲__________。

答案：(1) 4　(2) 5

解析：

(1)設取到的數中，較大的數爲 X，則 X 的機率分布如下

X	1	2	3	4	5
機率	$\frac{0}{C_2^5}$	$\frac{1}{C_2^5}$	$\frac{2}{C_2^5}$	$\frac{3}{C_2^5}$	$\frac{4}{C_2^5}$

取到較大編號數的數值期望值 $E(X)=2\times\frac{1}{10}+3\times\frac{2}{10}+4\times\frac{3}{10}+5\times\frac{4}{10}=4$

(2)設取到的兩數編號差的平方爲 X，則機率分布如下

X	1	4	9	16
機率	$\frac{4}{C_2^5}$	$\frac{3}{C_2^5}$	$\frac{2}{C_2^5}$	$\frac{1}{C_2^5}$

期望值 $E(X)=1\times\frac{4}{10}+4\times\frac{3}{10}+9\times\frac{2}{10}+16\times\frac{1}{10}=5$

10.一盒子裡有 5 元硬幣 5 個，10 元硬幣 3 個，50 元硬幣 2 個，任取 3 個，求得款的期望值。

答案：$\dfrac{93}{2}$

解析：

任取 1 個，得款的期望值為 $5\times\dfrac{5}{10}+10\times\dfrac{3}{10}+50\times\dfrac{2}{10}=\dfrac{31}{2}$

$\therefore$ 所求期望值=$\dfrac{31}{2}\times 3=\dfrac{93}{2}$

速解：$\dfrac{5\times5+10\times3+50\times2}{5+3+2}\times 3=\dfrac{93}{2}$

11.某市的汽車失竊紀錄顯示，平均在 100 天內，一天失竊 0，1，2，3，4 及 5 部汽車的天數各占 20 天，37 天，25 天，13 天，3 天及 2 天，試問該市一天汽車失竊部數的期望值為何？

答案：1.48 部

解析：

令 X 表該市一天汽車失竊的部數，由題意知 X 的所有可能值為

0，1，2，3，4，5，其相應之機率為 $\dfrac{20}{100}$，$\dfrac{37}{100}$，$\dfrac{25}{100}$，$\dfrac{13}{100}$，$\dfrac{3}{100}$，$\dfrac{2}{100}$

所以，$E(X)=0\cdot\dfrac{20}{100}+1\cdot\dfrac{37}{100}+2\cdot\dfrac{25}{100}+3\cdot\dfrac{13}{100}+4\cdot\dfrac{3}{100}+5\cdot\dfrac{2}{100}=1.48$（部）

12.一條售價 20 元的麵包原價 12 元，某小店賣出之麵包經 75 日的統計如下表：

一日所需	70 條	80 條	90 條	100 條	110 條	120 條	合計
日　　數	2 日	8 日	16 日	23 日	19 日	7 日	75 日

今日準備 100 條麵包出售，賣不完則隔日丟棄，試求本日利潤的期望值。

答案：698.7 元

解析：

利潤

$=(20\times70-1200)\times\dfrac{2}{75}+(20\times80-1200)\times\dfrac{8}{75}+$

$(20\times90-1200)\times\dfrac{16}{75}+(20\times100-1200)\times\dfrac{49}{75}=698.7$ 元

13.十個樣品中有 2 個不良品，今取出 3 個，求含有不良品的期望值。

答案：$\dfrac{3}{5}$

解析：

取到 0 個不良品的機率為 $\dfrac{C^{8}_{3}}{C^{10}_{3}}$，取到 1 個不良品的機率為 $\dfrac{C^{8}_{2}\cdot C^{2}_{1}}{C^{10}_{3}}$

取到 2 個不良品的機率為 $\dfrac{C^{8}_{1}\cdot C^{2}_{2}}{C^{10}_{3}}$

故取出不良品之期望個數爲 $0\cdot\dfrac{C_3^8}{C_3^{10}}+1\cdot\dfrac{C_2^8\cdot C_1^2}{C_3^{10}}+2\cdot\dfrac{C_1^8\cdot C_2^2}{C_3^{10}}=\dfrac{56}{120}+\dfrac{16}{120}=\dfrac{3}{5}$

速解：$\dfrac{2}{10}\times 3=\dfrac{3}{5}$

14.設骰子 A 的六面標示點數爲 1，1，1，2，2，3；骰子 B 的六面標示點數爲 1，2，2，3，3，3。今同擲二骰子 A，B 出現點數依次爲 a，b，試求：

(1) $a+b$ 的期望值。 (2) ab 的期望值。

答案：(1)4 (2) $\dfrac{35}{9}$

解析：

(1) $a+b$ 之值有 2，3，4，5，6 等 5 種，其發生的機率爲 $\dfrac{3}{36}$，$\dfrac{8}{36}$，$\dfrac{14}{36}$，$\dfrac{8}{36}$，$\dfrac{3}{36}$

$\therefore$ 所求期望值 $=2\times\dfrac{3}{36}+3\times\dfrac{8}{36}+4\times\dfrac{14}{36}+5\times\dfrac{8}{36}+6\times\dfrac{3}{36}=4$

(2) $a\times b$ 之值有 1，2，3，4，6，9 等 6 種

其發生的機率依次爲 $\dfrac{3}{36}$，$\dfrac{8}{36}$，$\dfrac{10}{36}$，$\dfrac{4}{36}$，$\dfrac{8}{36}$，$\dfrac{3}{36}$

$\therefore$ 所求期望值= $1\times\dfrac{3}{36}+2\times\dfrac{8}{36}+3\times\dfrac{10}{36}+4\times\dfrac{4}{36}+6\times\dfrac{8}{36}+9\times\dfrac{3}{36}=\dfrac{35}{9}$

速解：

點數 a 之期望值 $\dfrac{1+1+1+2+2+3}{6}=\dfrac{5}{3}$；點數 b 之期望值 $\dfrac{1+2+2+3+3+3}{6}=\dfrac{7}{3}$

(1) $a+b$ 之期望值 $\dfrac{5}{3}+\dfrac{7}{3}=4$ (2) $a\times b$ 之期望值 $\dfrac{5}{3}\times\dfrac{7}{3}=\dfrac{35}{9}$

15.一骰子的六個，分別記爲 1，1，1，2，3，4 點，將此骰子擲 2 次，求點數和的期望值。

答案：4

解析：

擲一次所得點數的期望值=平均值= $\dfrac{1+1+1+2+3+4}{6}\times 2=4$

16.袋中有 12 個球，其中有 3 個白球，若選取機會相等，則從袋中任取 3 個球，取中白球個數的期望值爲多少？

答案：$\dfrac{3}{4}$ 個

解析：

設 X 表選中白球之個數，則 $X=0$，1，2，3

X	0	1	2	3
機率	$\dfrac{C_3^9\times C_0^3}{C_3^{12}}$	$\dfrac{C_1^3\times C_2^9}{C_3^{12}}$	$\dfrac{C_2^3\times C_1^9}{C_3^{12}}$	$\dfrac{C_3^3\times C_0^9}{C_3^{12}}$

$\therefore\quad E(X)=\dfrac{1}{C_3^{12}}(1\times C_1^3\times C_2^9+2\times C_2^3\times C_1^9+3\times C_3^3\times C_0^9)$

$=\dfrac{1}{220}(1\times 3\times 36+2\times 3\times 9+3\times 1\times 1)=\dfrac{165}{220}=\dfrac{3}{4}$（個）

速解：期望值即平均值，取得白球之期望值爲$\dfrac{3}{12}\times 3=\dfrac{3}{4}$（個）

17.保險公司提出給 50 歲的人一年期壽險產品，保險額 10000 元，保費 345 元；請問公司獲利之期望值__________元。(已知一人由 50 歲活至 51 歲機率爲 0.987)

答案：215 元

解析： $345\times 0.987+(-10000+345)\times 0.013=215$

18.一袋中有 1 號卡片 n 張，2 號卡片 $n-1$ 張，…，k 號卡片$(n-k+1)$張，…，n 號卡片 1 張，任意自袋中抽取 1 張卡片，試求其號碼的期望值。

答案：$\dfrac{n+2}{3}$

解析：

所有卡片共有 $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$張

抽到卡片號碼爲 k 號的機率爲$\dfrac{n-k+1}{\frac{n(n+1)}{2}}=\dfrac{2(n-k+1)}{n(n+1)}$

$\therefore\quad$ 所求期望值$=\sum_{k=1}^{n}k\cdot\dfrac{2(n-k+1)}{n(n+1)}=\dfrac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}k(n-k+1)$

$=\dfrac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}[k(n+1)-k^2]=\dfrac{2(n+1)}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}k-\dfrac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}k^2$

$=(n+1)-\dfrac{2n+1}{3}=\dfrac{n+2}{3}$

18.過年時父親爲增加趣味以抽球方式給壓歲錢，要小明從袋中抽球，袋中有 5 個球，號碼爲 1，2，2，4，6，獎額是號碼數的 1000 倍，試問：

(1)小明拿到的壓歲錢最多是多少？　(2)小明的壓歲錢期望值是多少？

(3)如果壓歲錢改爲抽到 6 號給 10000 元，其餘號碼給 1000 元，試問此種給獎方式與原來的給獎方式，何者對小明較有利？

答案：(1) 6000 元　(2) 3000 元　(3)原來的較有利

解析：

(1)最多壓歲錢是 $6\times 1000=6000$ 元

(2)小明得到的壓歲錢的可能值有 4 種，分別爲 1000，2000，4000，6000 而得到這些報酬的機率分別爲$\dfrac{1}{5}$，$\dfrac{2}{5}$，$\dfrac{1}{5}$，$\dfrac{1}{5}$

所以小明壓歲錢的期望值爲 $1000\times\frac{1}{5}+2000\times\frac{2}{5}+4000\times\frac{1}{5}+6000\times\frac{1}{5}=3000$（元）

(3)改爲抽到 6 號給 10000 元，其餘給 1000 元

則其壓歲錢的可能值只有 10000，1000 兩種，其機率分別爲 $\frac{1}{5}$ ，$\frac{4}{5}$

所以此種方式壓歲錢的期望值爲 $10000\times\frac{1}{5}+1000\times\frac{4}{5}=2800$（元）

比原來的期望值小，故此種給獎方式對小明較不利