<table>
<tr><td colspan="6">高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：93.05.09</td></tr>
<tr><td rowspan="2">範圍</td><td rowspan="2">3-1,2 機率+ANS</td><td>班級</td><td></td><td rowspan="2">姓名</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>座號</td><td></td></tr>
</table>

一、複選題(每題 10 分)

1. 投擲兩粒骰子一次，點數和小於 5 的事件為 A，點數和不小於 11 的事件為 B，下列何者正確？(A) $n(A)=3$ (B) $n(B)=3$ (C) A 與 B 為互斥事件 (D)點數和小於 12 的事件為全事件 (E)點數和不小於 12 的事件為空事件

答案：(B)(C)

解析：

(A) $A=\{(1，1)，(1，2)，(1，3)，(2，1)，(2，2)，(3，1)\}$ $\therefore$ $n(A)=6$

(B) $B=\{(5，6)，(6，6)，(6，5)\}$ $\therefore$ $n(B)=3$

(C) $A\cap B=\phi$ $\therefore$ A 與 B 為互斥事件

(D)與(E)為互餘事件，$\{(6，6)\}\neq\phi$，$\therefore$ (D)(E)皆不正確

二、填充題(每題 10 分)

2. 一不公正骰子，每面出現之機率與其點數成正比，擲此骰子 2 次，求點數和為 10 之機率為__________。

答案：$\dfrac{73}{441}$

解析：

設 $P(1)：P(2)：P(3)：P(4)：P(5)：P(6)=k：2k：3k：4k：5k：6k$

$\Rightarrow$ $k+2k+3k+4k+5k+6k=21k=1$ $\Rightarrow$ $k=\dfrac{1}{21}$

點數和為 10 的情形有(4，6)，(5，5)，(6，4)

故所求 $=\dfrac{4}{21}\times\dfrac{6}{21}+\dfrac{5}{21}\times\dfrac{5}{21}+\dfrac{6}{21}\times\dfrac{4}{21}=\dfrac{73}{441}$

3. 甲、乙兩人參加演講比賽，共有 10 個人參賽，若以抽籤方式決定上場的次序，則甲、乙兩人相鄰上場的機率為__________。

答案：$\dfrac{1}{5}$

解析：$\dfrac{9!\times 2!}{10!}=\dfrac{1}{5}$

4. 若甲、乙兩人各擲一枚公正的骰子一次，則甲的點數大於乙的點數的機率為__________。

答案：$\dfrac{5}{12}$

解析：(甲的點數 = 乙的點數)的機率為 $\dfrac{6}{36}$

$\therefore$ (甲的點數大於乙的點數)的機率為 $\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{6}{36})=\dfrac{5}{12}$

(甲的點數大於乙的點數)的機率 與 (乙的點數大於甲的點數)的機率 個佔半

5 答案：$\dfrac{43}{216}$

解析：同時投擲三粒骰子點數和為 5 的倍數者有

(1) 點數和 $=5$ 者有(1，1，3)，(1，2，2) 排列之

(2) 點數和 $=10$ 者有

(1，3，6)，(1，4，5)， (2，2，6)，(2，3，5)，(2，4，4)，(3，3，4) 排列之

(3) 點數和 $=15$ 者有(3，6，6)，(4，5，6)，(5，5，5) 排列之

故所求機率為 $\dfrac{\frac{3!}{2!}\times 6+3!\times 4+\frac{3!}{3!}}{6^3}=\dfrac{43}{216}$

6. 袋中有 3 紅球，7 白球；每次取 1 球，取出不放回，每球被取到的機會相等，則第 3 次取到紅球之機率為__________。

答案：$\dfrac{3}{10}$

解析：出不放回 $\Rightarrow$ 如同抽獎 $\Rightarrow$ 第 3 次抽中紅球如同第一次抽中紅球，所求機率為 $\dfrac{3}{10}$

7. 袋中有 5 紅球，3 白球；今任取 3 球，每球被取到的機會相等，則 3 球中至少 2 紅球之機率為__________。

答案：$\dfrac{5}{7}$

解析：3 球中，至少 2 紅球 $\Rightarrow$ 2 紅 1 白及 3 紅球，所求機率 $=\dfrac{C_2^5C_1^3+C_3^5}{C_3^8}=\dfrac{30+10}{56}=\dfrac{5}{7}$

8.自一副撲克（A poker hand）牌 52 張中任取 5 張，

(1)求 5 張牌成為「富而好施」（Full house），即點數如(x，x，y，y，y)的形式，但 x，y 是不同點數的機率為__________。

(2)求 5 張牌成為「兩對」（Two pairs），即點數如(x，x，y，y，z)的形式，但 x，y，z是不同點數的機率為__________。

答案：(1) $\dfrac{6}{4165}$ (2) $\dfrac{198}{4165}$

解析：

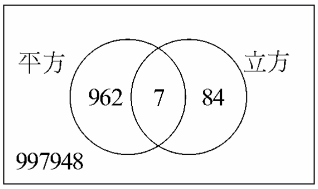
(1) $P=\dfrac{C_2^{13}\times C_2^4C_3^4\times 2!}{C_5^{52}}=\dfrac{13\times 12\times 6\times 4}{\frac{52\times 51\times 50\times 49\times 48}{1\times 2\times 3\times 4\times 5}}=\dfrac{6}{4165}$

(2) $P=\dfrac{C_2^{13}C_1^{11}C_2^4C_2^4C_1^4}{C_5^{52}}=\dfrac{13\times 6\times 11\times 6\times 6\times 4}{\frac{52\times 51\times 50\times 49\times 48}{1\times 2\times 3\times 4\times 5}}=\dfrac{198}{4165}$

9.自 10^3至 10^6的正整數中任取一數，則既不是平方數，也不是立方數之機率為__________。

答案：$\dfrac{997948}{999001}$

解析：



在 10^3至 10^6的正整數中，平方數有 32^2，33^2，…，1000^2共 969 個

立方數有 10^3，11^3，…，100^3共 91 個，六次數有 4^6，5^6，…，10^6共 7 個

$\therefore\quad P=\dfrac{997948}{999001}$

10.已知路旁有 10 棵樹，將它們任意編號爲 1，2，3，…，9，10，且其中有三棵松樹，則編號爲 4 與 5 都是松樹的機率爲__________。

答案：$\dfrac{1}{15}$

解析：

三棵松樹的編號中有兩棵編 4、5 的方法數爲 $C_2^3\times 2!\times 8!$

10 棵樹任意編號有 10！方法

所以三棵松樹編號爲 4 與 5 的機率 $\dfrac{3\times 2!\times 8!}{10!}=\dfrac{1}{15}$

11.袋中有 10 張籤條，其中 3 張有獎，今從袋中一次抽取一張籤條，共取 10 次，將籤條取完，則第二張中獎的機率爲__________，第八張中獎的機率爲__________。

答案：$\dfrac{3}{10}$；$\dfrac{3}{10}$

解析：

(1)第二張中獎的機率 $=\dfrac{3\times 9!}{10!}=\dfrac{3}{10}$

(2)第八張中獎的機率 $=\dfrac{3\times 9!}{10!}=\dfrac{3}{10}$

12.投擲一骰子兩次，A表第一次出現奇數點的事件，B表第二次出現奇數點的事件，則

(1) $n(A)=$ __________。 (2) $n(B)=$ __________。 (3) $n(A\cap B)=$ __________。

答案：(1) 18　(2) 18　(3) 9

解析：

樣本空間 $S=\{(x，y)\mid x，y=1，2，3，4，5，6\}$

(1) $A=\{(x，y)\mid x=1，3，5；y=1，2，3，4，5，6\}\quad\Rightarrow\quad n(A)=18$

(2) $B=\{(x，y)\}\mid x=1，2，3，4，5，6；y=1，3，5\}\quad\Rightarrow\quad n(B)=18$

(3) $A\cap B=\{(x，y)\mid x=1，3，5；y=1，3，5\}\quad\Rightarrow\quad n(A\cap B)=9$

13.投擲一骰子，求下列之樣本空間S，

(1)一切點數$S=$ ________。 (2)質數，合數$S=$ ________。(3)奇數，偶數$S=$ ________。

答案：

(1) $S=\{1，2，3，4，5，6\}$　　(2) $S=\{(2，3，5)，(1，4，6)\}$

(3) $S=\{(1，3，5)，(2，4，6)\}$

14.5 男 5 女圍一圓桌而坐，則恰好男女相間之機率爲__________。

答案：$\frac{1}{126}$

解析：10 人環狀排列$\frac{10!}{10}=9!$，又男女相間$\frac{5!}{5}\times5!=4!\times5!$，　$P=\frac{4\,!\,5\,!}{9\,!}=\frac{1}{126}$

15.從 1、2、3、…、9 等九個數字中任取相異兩數，則

(1)所取得二數互質的機率為__________。(2)所取得二數積為奇數的機率為__________。

答案：(1)$\frac{3}{4}$　(2)$\frac{5}{18}$

解析：

(1)任取兩數的方法有$C_2^9=36$種，其中不互質的有(2，4)，(2，6)，(2，8)，(3，6)，(3，9)，(4，6)，(4，8)，(6，8)，(6，9)等 9 種情況

故由 1、2、3、…、9 等九個數字中任取相異兩數，其中互質的機率 $=1-\frac{9}{36}=\frac{3}{4}$

(2)$\begin{cases}2k+1\Rightarrow1,3,5,7,9\\2k\Rightarrow2,4,6,8\end{cases}\Rightarrow\frac{C_2^5}{36}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$

16.從不大於 600 的自然數中，任取一數，則其與 600 互質之機率為__________。

答案：$\frac{4}{15}$

解析：

$\because$　$600=2^3\times3\times5^2$，1～600 的自然數中

2 的倍數有 300 個，3 的倍數有 200 個，5 的倍數有 120 個，6 的倍數有 100 個

10 的倍數有 60 個，15 的倍數有 40 個，30 的倍數有 20 個

故與 600 互質者共有 $600-(300+200+120-100-60-40+20)=160$ 個

$\therefore$　所求機率 $=\frac{160}{600}=\frac{4}{15}$

17.有 3 個人同時玩猜拳（剪刀、石頭、布），同時出拳一次，則

(1)恰有一人得勝的機率為__________。　(2)無法分出勝負的機率為__________。

答案：(1)$\frac{1}{3}$　(2)$\frac{17}{27}$

解析：

(1)3 人猜拳，其出拳方法有 3^3種，3 人中恰有 1 人勝的選擇有C_1^3種

當勝者出「剪刀」時，其他 2 人只能出「布」1 種，其餘類推

故勝者的出拳法有 3 種，其餘 2 人只有 1 種　$\therefore$　所求機率$=C_1^3\times\frac{3\times1}{3^3}=\frac{1}{3}$

(2)無人得勝其出拳法為剪刀，石頭，布均有人出或 3 人均出同一種

令「剪刀」為a，「石頭」為b，「布」為c，則不分勝負的出拳法有

①三同（aaa，bbb，ccc）：排列數$\frac{3\,!}{3\,!}\times3=3$

②三異（abc）：排列數$3!=6$

$\therefore$　所求機率 $=\frac{3+6}{3^3}=\frac{1}{3}$

18.假設一個 50 歲的人罹患高血壓的機率是$\frac{1}{5}$，罹患糖尿病的機率是$\frac{1}{10}$，兩種病都罹患的機率是$\frac{1}{30}$，求一個 50 歲的人，這兩種病都沒有的機率。

答案：$\frac{11}{15}$

解析：$1-(\frac{1}{5}+\frac{1}{10}-\frac{1}{30})=\frac{11}{15}$

19.擲兩粒骰子一次，求點數和爲 5 的機率。

答案：$\frac{1}{9}$

解析：樣本空間 S，$n(S)=36$，設 A 表點數和爲 5 的事件

$A=\{(1，4)，(2，3)，(3，2)，(4，1)\}$，$n(A)=4$，　$P(A)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

20.丟一枚硬幣 5 次，觀察每次出現正、反面的次序，A_k表 5 次中出現k次正面的事件，求 $P(A_k)$ $=$？

答案：$P(A_k)=C_k^5(\frac{1}{2})^k(\frac{1}{2})^{5-k}$，$k=0，1，2，3，4，5$

21.自 200 到 800 之整數中，不爲 3 且不爲 7 之倍數者有幾個？

答案：344 個

解析：

自 200 到 800 之整數中，可爲 3 之倍數所成集合爲A_3，7 之倍數所成集合爲A_7

則$n(A_3)=[\frac{800}{3}]-[\frac{200}{3}]=266-66=200$，$n(A_7)=[\frac{800}{7}]-[\frac{200}{7}]=114-28=86$

$n(A_3\cap A_7)=[\frac{800}{21}]-[\frac{200}{21}]=38-9=29$

$\therefore\quad n(A_3\cup A_7)=n(A_3)+n(A_7)-n(A_3\cap A_7)=200+86-29=257$

故$n(A'_3\cap A'_7)=601-257=344$

22.在教室中有 5 位男生及 5 位女生，老師隨機自其中叫了 3 位學生離開教室到辦公室，試求留在教室中女生至少有 4 位之機率。

答案：$\frac{1}{2}$

解析：自 10 位學生中選取 3 位的方法數爲 $C_3^{10}=120$ 留在教室中有女生至少有 4 位

亦即女生最多只有 1 位，故選取的 3 位爲(3 男)或(2 男 1 女)，

選取 3 位男生的方法數爲 $C_3^5\cdot C_0^5=10$；選取 2 位男生 1 位女生的方法數爲 $C_2^5\cdot C_1^5=50$，

故所求機率爲$\frac{10+50}{120}=\frac{1}{2}$

23.一袋中有黑球、白球、紅球共 12 個，已知黑球有四個且由袋中任取二球，取到二個均爲

紅球的機率為 $\dfrac{5}{33}$ ，求白球的個數。

答案：3 個

解析：設白球有 x 個，則紅球有 $8-x$ 個，$\dfrac{C_2^{8-x}}{C_2^{12}}=\dfrac{5}{33}$ $\Rightarrow$ $(8-x)(7-x)=20$ $\Rightarrow$ $x=3$

24.擲四個硬幣，求出現二個正面二個反面的機率。

答案：$\dfrac{3}{8}$

解析：

(方法一) 二個正面二個反面出現方法為 $\dfrac{4!}{2!2!}=6$ ，擲四個硬幣出現 $2^4=16$ 種 $\Rightarrow \dfrac{6}{16}=\dfrac{3}{8}$

(方法二) 四次中 2 次給正面，所求機率：$C_2^4\times(\dfrac{1}{2})^2\times(\dfrac{1}{2})^2=\dfrac{3}{8}$

25.一袋中有黑球 10 個，白球 10 個，自袋中任取二球，求二球為同色球的機率為何？

答案：$\dfrac{9}{19}$

解析：樣本空間為 S，則 $n(S)=\ C_2^{20}=190$，二球為同色球，可分為

(1) 二球為黑色 $\Rightarrow$ 共有 $C_2^{10}=45$ 種

(2) 二球為白色 $\Rightarrow$ 共有 $C_2^{10}=45$ 種

$\therefore$ 所求機率為 $\dfrac{45+45}{190}=\dfrac{9}{19}$

26.若 $P(A)=\dfrac{1}{2}$ ，$P(B)=\dfrac{1}{3}$ ，$P(A\cap B)=\dfrac{1}{10}$ ，求(1) $P(A\cup B)$。 (2) $P(B')$。

答案：(1) $\dfrac{11}{15}$ (2) $\dfrac{2}{3}$

解析：(1) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{10}=\dfrac{11}{15}$

(2) $P(B')=1-P(B)=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$

27.一袋中有若干球，每個球標記一個數，其中標記 1 的有 1 個，標記 2 的有 2 個，標記 3 的有 3 個，⋯，標記 10 的有 10 個，假設每個球被取的機率相同，今從袋中任取兩球，則兩球標號都是偶數的機率為何？

答案：$\dfrac{29}{99}$

解析：

袋中的球共有 $1+2+\cdots+10=55$ 個，其中標記偶數的球有 $2+4+6+8+10=30$ 個

任意取兩球的方法有 C_2^{55} 種，兩球都標記偶數的取法有 C_2^{30} 種

取兩球標號偶數的機率為 $\dfrac{C_2^{30}}{C_2^{55}}=\dfrac{30\times 29}{55\times 54}=\dfrac{29}{99}$