高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：93.05.08					
範圍	2-5 二項式定理 +ANS	班級		姓名	
		座號			

一、複選題(每題 10 分)

1.下述之五個組合級數中，正確的有

(A) $C_1^n+C_2^n+C_3^n+\cdots+C_n^n=2^n$　　(B) $1+2\cdot C_1^n+2^2\cdot C_2^n+\cdots+2^n\cdot C_n^n=3^n$

(C) $C_1^n+C_3^n+C_5^n+\cdots=2^{n-1}$　　(D) $C_2^n+C_4^n+C_6^n+\cdots=2^{n-1}$

(E) $C_0^n-C_1^n+C_2^n-C_3^n+\cdots+(-1)^n\cdot C_n^n=0$

答案：(B)(C)(E)

解析：$(1+x)^n=C_0^n+C_1^nx+C_2^nx^2+\cdots+C_n^nx^n$

(A)令$x=1$ $\Rightarrow$ $C_0^n+C_1^n+C_2^n+\cdots+C_n^n=2^n\cdots\cdots$①

$\Rightarrow$ $C_1^n+C_2^n+\cdots+C_n^n=2^n-1$

(B)令$x=2$ $\Rightarrow$ $1+2\cdot C_1^n+2^2\cdot C_2^n+\cdots+2^n\cdot C_n^n=3^n$

(C)(D)(E)令$x=-1$ $\Rightarrow$ $C_0^n-C_1^n+C_2^n-\cdots+(-1)^nC_n^n=0\cdots\cdots$②

由①－②得$C_1^n+C_3^n+\cdots=2^{n-1}$，由①＋②得$C_0^n+C_2^n+\cdots=2^{n-1}$

$\Rightarrow$ $C_2^n+C_4^n+\cdots=2^{n-1}-C_0^n=2^{n-1}-1$

二、填充題(每題 10 分)

2. $(2x^2-\dfrac{3}{x})^6$展開式中，(1)常數項 ＝__________。　(2) x^5的係數爲__________。

答案：(1) 4860　(2) 0

解析：$(2x^2-\dfrac{3}{x})^6$展開式中，一般項爲$C_r^6(2x^2)^{6-r}(-\dfrac{3}{x})^r=(-1)^rC_r^6\cdot2^{6-r}\cdot3^r\cdot x^{12-3r}$

(1)令 $12-3r=0$ $\Rightarrow$ $r=4$，故常數項爲$(-1)^4C_4^6\times2^2\times3^4=4860$

(2)令 $12-3r=5$ $\Rightarrow$ $r=\dfrac{7}{3}$（不合），即無x^5項，故x^5的係數 ＝0

3. 試求$(x^2-\dfrac{3}{x})^6$展開式中，x^3項的係數爲__________。

答案：-540

解析：$(x^2-\dfrac{3}{x})^6=[x^2+(-\dfrac{3}{x})]^6$展開式中

一般項爲$\dfrac{6!}{p!q!}(x^2)^p(-\dfrac{3}{x})^q=\dfrac{6!}{p!q!}(-3)^q\cdot x^{2p-q}$，其中$p+q=6$

$\Rightarrow$ $\begin{cases}p+q=6\\2p-q=3\end{cases}$ $\Rightarrow$ $p=3$，$q=3$，故x^3項之係數 $=\dfrac{6!}{3!3!}\cdot(-3)^3=-540$

4. $(3x-\dfrac{1}{9\sqrt{x}})^{12}$的展開式中，試求：(1) x^2項的係數爲________。　(2) x^6項的係數爲________。

答案：(1) 0　(2) 495

解析：

$(3x-\frac{1}{9\sqrt{x}})^{12}=[3x-\frac{1}{9}(x)^{-\frac{1}{2}}]^{12}=\sum_{k=0}^{12}C_k^{12}(3x)^{12-k}(-\frac{1}{9}x^{-\frac{1}{2}})^k=\sum_{k=0}^{12}C_k^{12}(3)^{12-k}(-\frac{1}{9})^k x^{12-\frac{3}{2}k}$

(1)$12-\frac{3}{2}k=2 \quad\Rightarrow\quad k=\frac{20}{3}$，但$k\in N$　$\therefore$　沒有此項，即x^2項係數為 0

(2) $12-\frac{3}{2}k=6 \quad\Rightarrow\quad k=4$，$x^6$項係數為$C_4^{12}\cdot 3^8(-\frac{1}{9})^4=495$

5. 設a為實數，$(ax^2+\frac{1}{x})^5$展開式中，x^4的係數為 80，則$a=$__________，展開式中係數的最大值為__________。

答案：2；80

解析：設$(ax^2+\frac{1}{x})^5$展開式中，一般項為$C_r^5(ax^2)^r\cdot(\frac{1}{x})^{5-r}$，則$(x^2)^r\cdot(\frac{1}{x})^{5-r}=x^{2r}\cdot x^{r-5}$

即 $2r+r-5=4$，得$r=3$，所以係數$C_3^5a^3=80$，$a^3=8$，$a=2$

$(2x^2+\frac{1}{x})^5$展開式的各項係數分別為 2^5，5×2^4，10×2^3，10×2^2，5×2，1

所以最大的係數為 80

6. $(1+x^2)+(1+x^2)^2+(1+x^2)^3+\ \cdots\ +(1+x^2)^{20}$的展開式中，$x^6$的係數為__________。

答案：5985

解析：原式 $=(1+x^2)\frac{(1+x^2)^{20}-1}{(1+x^2)-1}=\frac{(1+x^2)^{21}-(1+x^2)}{x^2}$

原式x^6的係數為$(1+x^2)^{21}$中第五項$C_4^{21}x^8$的係數　$\therefore$　$C_4^{21}=5985$

7. 試求 $\sum_{k=0}^{10}(1-x)^k$ 展開式中x^5項的係數__________。

答案：-462

解析：$\sum_{k=0}^{10}(1-x)^k=1+(1-x)+(1-x)^2+(1-x)^3+\ \cdots\ +(1-x)^{10}$

$=\frac{1\cdot[(1-x)^{11}-1]}{(1-x)-1}=\frac{(1-x)^{11}-1}{-x}=\frac{(x-1)^{11}+1}{x}$

則原展開式中x^5項係數 $=(x-1)^{11}$展開式中x^6之係數 $=C_6^{11}(-1)^5=-462$

8.試計算$(1.05)^{12}$的近似值至小數點後一位（第一位四捨五入）之值為__________。

答案：1.8

解析：$(1.05)^{12}=(1+0.05)^{12}=C_0^{12}1+C_1^{12}0.05+C_2^{12}(0.05)^2+C_3^{12}(0.05)^3+\ \cdots$

$=1+0.6+0.165+0.0275+\ \cdots\ =1.7925\cdots\fallingdotseq 1.8$

9.$(x^2-2x+\frac{1}{x^2})^6$展開式中的常數項為__________。

答案：260

解析：一般項：$\frac{6!}{p!q!r!}(x^2)^p(-2x)^q(\frac{1}{x^2})^r$

$=\dfrac{6!(-2)^q}{p!q!r!}x^{2p+q-2r}$，$p+q+r=6$，$p$，$q$，$r\in N\cup\{0\}$

令 $2p+q-2r=0$，又$p+q+r=6$，得$(p，q，r)=(0，4，2)，(3，0，3)$

所求 $=\dfrac{6!(-2)^4}{4!2!}+\dfrac{6!}{3!3!}=240+20=260$

10.$(x+y+z+u)^{10}$展開式中，

(1)所有不同類項共有__________項。　(2) $x^3y^3z^2u^2$項的係數爲__________。

(3) $x^4y^3z^3$的同型項共有__________項。

答案：(1) 286　(2) 25200　(3) 12

解析：(1)展開式中一般項爲 $\dfrac{10!}{a!b!c!d!}x^ay^bz^cu^d$，其中$a+b+c+d=10$

a，b，c，d爲非負整數，故有$H^4_{10}=C^{13}_{10}=286$ 項

(2) $x^3y^3z^2u^2$項之係數 $=\dfrac{10!}{3!3!2!2!}=25200$

(3) $x^4y^3z^3$的同型項共有$C^4_3\times\dfrac{3!}{2!}=12$ 項

11.在$(2-\dfrac{3}{x}+4x^2)^4$之展開式中，(1)常數項爲__________。　(2) x^3項之係數爲__________。

答案：(1) 880　(2) −1152

解析：

$$(2-\frac{3}{x}+4x^2)^4=\sum_{\substack{p+q+r=4\\0\le p，q，r\le 4}}\frac{4!}{p!\,q!\,r!}2^p(-\frac{3}{x})^q(4x^2)^r=\sum_{\substack{p+q+r=4\\0\le p，q，r\le 4}}\frac{4!}{p!\,q!\,r!}2^p(-3)^q4^rx^{-q+2r}$$

(1)$\begin{cases}p+q+r=4\\-q+2r=0\end{cases}$ $\therefore$ $\begin{array}{c|c|c}p&4&1\\q&0&2\\r&0&1\end{array}$ $\therefore$ $\dfrac{4!}{4!}2^4+\dfrac{4!}{1!\,2!\,1!}2\cdot(-3)^2\cdot4=880$

(2)$\begin{cases}p+q+r=4\\-q+2r=3\end{cases}$ $\therefore$ $\begin{array}{c|c}p&1\\q&1\\r&2\end{array}$ $\therefore$ $\dfrac{4!}{1!\,1!\,2!}2\cdot(-3)\cdot4^2=-1152$

12.$(2x^2+\dfrac{3}{2x})^8$的展開式中，x^4項的係數爲__________，而$(4x^3-x+3)^6$的展開式中，x^8項的係數爲__________。

答案：5670；12936

解析：(1)　$(2x^2+\dfrac{3}{2x})^8=\sum\limits_{k=0}^{8}C^8_k(2x^2)^k(\dfrac{3}{2x})^{8-k}=\sum\limits_{k=0}^{8}C^8_k\cdot2^k\cdot(\dfrac{3}{2})^{8-k}\cdot x^{3k-8}$

求x^4項之係數，$3k-8=4$　$\Rightarrow$　$k=4$

$\therefore$　係數 $=C^8_4\cdot2^4\cdot(\dfrac{3}{2})^4=\dfrac{8\times7\times6\times5}{1\times2\times3\times4}\times3^4=70\times81=5670$

(2)　$(4x^3-x+3)^6=\sum\limits_{p+q+r=6}\dfrac{6!}{p!q!r!}(4x^3)^p(-x)^q\cdot3^r$

$$=\sum_{p+q+r=6}\frac{6!}{p!q!r!}4^p\cdot 3^r\cdot(-1)^q\cdot x^{3p+q}$$

x^8項的係數$\begin{cases}3p+q=8\\ p+q+r=6\end{cases}$

p	1	2
q	5	2
r	0	2

$$\therefore\quad \text{係數}=\frac{6!}{1!5!}\cdot 4\cdot 3^0\cdot(-1)^5+\frac{6!}{2!2!2!}\cdot 4^2\cdot 3^2\cdot(-1)^2$$

$$=-24+90\times 16\times 9=12936$$