高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：93.04.30					
範圍	2-4 組合+ANS	班級		姓名	
		座號			

一、填充題(每題 10 分)

1.由 1，2，3，4，⋯，15 等 15 個自然數中，任取相異三個數字，則其和爲偶數的取法有_種。

答案：231

解析：

三數之和爲偶數，可分爲兩奇一偶及三偶等兩類

①兩奇一偶的取法有 $C^8_2\times C^7_1=196$ 種

②三偶的取法有 $C^7_3=35$ 種

故三數和爲偶數的取法有 $196+35=231$ 種

2.設 n，m 爲兩自然數，如果 $C^n_m:C^{n+1}_m:C^{n+2}_m=6:9:13$，則 $n=$ __________。

答案：11

解析：

$C^n_m:C^{n+1}_m:C^{n+2}_m=6:9:13$

$\dfrac{C^n_m}{C^{n+1}_m}=\dfrac{6}{9}$，即 $\dfrac{\frac{n!}{m!(n-m)!}}{\frac{(n+1)!}{m!(n+1-m)!}}=\dfrac{2}{3}$，亦即 $\dfrac{n+1-m}{n+1}=\dfrac{2}{3}$

$\dfrac{C^{n+1}_m}{C^{n+2}_m}=\dfrac{9}{13}$，即 $\dfrac{\frac{(n+1)!}{m!(n+1-m)!}}{\frac{(n+2)!}{m!(n+2-m)!}}=\dfrac{9}{13}$，亦即 $\dfrac{n+2-m}{n+2}=\dfrac{9}{13}$

因此，可得 $\begin{cases}3(n+1-m)=2(n+1)\\13(n+2-m)=9(n+2)\end{cases}$，亦即 $\begin{cases}n-3m=-1\\4n-13m=-8\end{cases}$，可得 $m=4$，$n=11$

3.5 本相同的高二數學課本，全部任意分給甲，乙，丙三人，有____________種分法。

答案：21

解析：

$H^3_5=C^7_5=21$（種）

4.由 1，2，3，4，5，6，7，8 中，4 個不同的數字構成的四位整數，

(1)由左而右，數字愈來愈小的共有__________個。

(2)百位數字最大的四位數共有__________個。

答案：(1)70 (2)420

解析：

(1)$C^8_4=\dfrac{8\times7\times6\times5}{1\times2\times3\times4}=70$（個）（選出即可，因其會自動排好）

(2)$C^8_4\times3!=70\times6=420$（個）

5.紅、黃、藍、綠四色球各兩個，且大小均相同，求下列各情況的方法數？

(1)任取四個的方法數__________。

(2)任取四個球之後，再將它們排成一列的排法＿＿＿＿＿＿。
答案：(1)19　(2)204
解析：
(1)四異：$C^4_4=1$，二同二異：$C^4_2\cdot C^2_1=12$，二同二同：$C^4_1\cdot C^3_1\cdot\frac{1}{2}=6$
選取方法數$=1+12+6=19$（種）
(2) $1\times 4!=24$，$12\times\frac{4!}{2!}=144$，$6\times\frac{4!}{2!2!}=36$，排列數有 204 種
6.五種酒倒入 4 個酒杯中，酒不混合，
(1)若酒杯相異，而酒可重複使用，則倒法有＿＿＿＿＿＿種。
(2)若酒杯相同，而每種酒至多只能倒一次，則倒法有＿＿＿＿＿＿種。
答案：(1)625　(2)5
解析：
(1)$5^4=625$　(2)$C^5_4=5$
7.7 件不同物，分給甲、乙、丙三人，一人至少一件，一人至少二件，一人至少三件之方法有＿＿＿＿＿＿種。
答案：1680
解析：
$$\underbrace{(3^7-3\times 2^7+3\times 1^7)}_{\text{每人至少一件之方法}}-\underbrace{C^7_5C^3_1\times 2!}_{\text{其中一人獨得五件，另二人各得一件之方法}}=1806-216=1680$$
8.由 tomorrow 八個字母中，任取四個字母，共有＿＿＿＿＿＿種取法。
答案：22
解析：
ooo　rr　tmw

情形	組合
3 同 1 異	$C^1_1C^4_1=4$
2 同 2 同	$C^2_2=1$
2 同 2 異	$C^2_1\cdot C^4_2=12$
全異	$C^5_4=5$

$\therefore\ 4+1+12+5=22$
9.相同的鉛筆 3 支，原子筆 2 支，鋼筆 3 支，分給兒童，每人最多一支，分給 10 人時，有＿種分法。
答案：25200
解析：
$\frac{10!}{3!2!3!2!}=25200$（種）
10.試求下列各式之值：
(1) $C^3_2+C^4_2+C^5_2+C^6_2+\cdots+C^{20}_2=$＿＿＿＿＿＿。
(2) $H^4_1+H^4_2+H^4_3+H^4_4+\cdots+H^4_9=$＿＿＿＿＿＿。

答案：(1) 1139　(2) 714

解析：

(1)原式 $=C_2^3+C_3^3+C_2^4+C_2^5+C_2^6+\cdots+C_2^{20}-1=C_3^4+C_2^4+\cdots+C_2^{20}-1$

$=\cdots=C_3^{20}-1=1139$

(2)原式 $=C_1^4+C_2^5+C_3^6+\cdots+C_9^{12}=C_3^4+C_3^5+C_3^6+\cdots+C_3^{12}$

$=C_3^4+C_4^4+C_3^5+C_3^6+\cdots+C_3^{12}-1=C_4^5+C_3^5+C_3^6+\cdots+C_3^{12}-1=\cdots=C_4^{13}-1=$

714

11.方程式 $x+y+z+u+v=10$ 之正整數解有__________組。

答案：126

解析：

$H_5^5=C_4^9=126$（組）

12.滿足不等式 $x+y+z+u\le 8$ 的正整數解有__________組。

答案：70

解析：

$x+y+z+u\le 8$，x，y，z，$u\in N$

$\Leftrightarrow$　$x+y+z+u+t=8$，x，y，z，$u\in N$，$t\in N\cup\{0\}$

$\Leftrightarrow$　$(x-1)+(y-1)+(z-1)+(u-1)+t=4$

$\Leftrightarrow$　$x'+y'+z'+u'+t=4$，x'，y'，z'，u'，$t\in N\cup\{0\}$

$\therefore$　$H_4^5=C_4^8=70$

13 點中，先計三點共線有 4 組，四點共線有 10 組。

解析：

(1)任三點不共線時，有 C_2^{16} =120 條，但其中四點共線有 10 條，3 點共線有 4 條

故實際上之直線有 $C_2^{16}-10\cdot C_2^4+10-4\,C_2^3+4=120-60+10-12+4=62$ 條

(2) $C_3^{16}-10\cdot C_3^4-4\,C_3^3=560-40-4=516$（個）

14.8 人同去冷飲店，有 A，B，C，D，E，F 等 6 種飲料可以選擇，每人任點一種，則有__種點法。

答案：1287

解析：

設 A 飲料點了 x_1 杯，⋯，F 飲料點了 x_6 杯

則 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=8$（$x_1$，⋯，$x_6\ge 0$）

故有 $H_8^6=C_8^{6+8-1}=C_8^{13}=C_5^{13}=1287$ 種

15.設 $n\in N$，若 $P_3^n=4\,C_2^{n+1}$，則 $n=$ __________。

答案：5

解析：

$P_3^n=4\,C_2^{n+1}$　$\Rightarrow$　$n(n-1)(n-2)=4\times\dfrac{(n+1)n}{2\,!}$　$\because$　$n\in N$　$\therefore$　$n^2-3n+2=2n+2$

$\Rightarrow$　$n(n-5)=0$　$\Rightarrow$　$n=0$（不合）或 $n=5$　$\therefore$　$n=5$

16.某拳擊比賽，規定每位選手必須和所有其他選手各比賽一場，賽程總計爲 78 場，則選手

人數爲__________人。

答案：13

解析：

設選手共有 n 人，每位選手必須和其他選手各賽一場　∴　賽程安排方法有 C_2^n 種

$\Rightarrow\quad C_2^n=78\quad\Rightarrow\quad \dfrac{n!}{2!(n-2)!}=78\quad\Rightarrow\quad n(n-1)=156\quad\Rightarrow\quad n=13$

17.5 件不同物品，分給甲、乙、丙、丁 4 人，

(1)甲恰得 1 件，有__________種分法。　(2)每人至少一件，有__________種分法。

答案：(1) 405　(2) 240

解析：

(1)先選 1 件給甲，餘下三人分另外 4 件，$C_1^5\cdot(3^4)=5\times 81=405$（種）

(2) $4^5-4\cdot 3^5+6\cdot 2^5-4\cdot 1^5+1\cdot 0^5=240$（種）

18.紅球、黃球、白球、黑球各有三個，同色相同，

(1)取三球排一列的排列數爲__________。

(2)取四個排一列，相同不相鄰的排列數爲__________。

(3)取三球之組合數爲__________。

(4)取六球之組合數爲__________。

(5)取六球，各色球各至少一個，組合數爲__________。

(6)12 個球全部分給甲、乙二人，每人至少分得一個，分法有

__________種。

答案：(1) 64　(2) 168　(3) 20　(4) 44　(5) 10　(6) 254

解析：

(1)排列情形如下

三同：$C_1^4=4$，二同一異：$C_1^4C_1^3\cdot\dfrac{3!}{2!}=36$，三異：$C_3^4\cdot 3!=24$

∴　共 $4+36+24=64$ 種排列

(2)排列情形如下

二同二異：$\dfrac{P_3^4}{2!}\cdot 2!\cdot P_2^3=144$

3 個空位選 2 個，排 2 個同色球

2 個不同色球的排列數

4 種顏色挑 3 個給 2 個同色球、2 個不同色球

四異：$4!=24$

∴　共 $144+24=168$ 種排列

(3)組合情形如下

三同：$C_1^4=4$，二同一異：$C_1^4C_1^3=12$，三異：$C_3^4=4$　∴　共 $4+12+4=20$ 種組合

(4)組合情形如下

三同三同(3，3)：$C_2^4=6$，三同二同(3，2，1)：$C_1^4C_1^3C_1^2=24$

三同三異(3，1，1，1)：$C_1^4C_3^3=4$，二同二同二同(2，2，2)：$C_3^4=4$

二同二同二異(2，2，1，1)：$C_2^4C_2^2=6$　∴　共 $6+24+4+4+6=44$ 種組合

(5)組合情形如題(4)之(3，1，1，1)及(2，2，1，1)　∴　共有 $4+6=10$ 種組合

(6)先分紅球給甲 x_1 個，乙 x_2 個，$x_1+x_2=3$，$0\le x_1$，$x_2\le 3$

共 $H_3^2=C_3^{2+3-1}=C_3^4=4$ 種分法，同理，黃、白、黑球也有 4 種分法

∴　全部有 $4\times4\times4\times4=256$ 種分法，再去掉全部給甲或乙等 2 種分法

∴　共 $256-2=254$ 種分法

19.將七件不同的東西分給三個人，其中一人得 3 件，另外兩人各得 2 件，分法有________種。

答案：630

解析：

$C_3^7C_2^4C_2^2\times\frac{3!}{2!}=630$（種）

20.六個不同玩具全部分給甲、乙、丙 3 人，每人至少 1 個之分法有__________種。

答案：540

解析：

(1)按(4，1，1)分 3 人　⇒　$\frac{C_4^6\cdot C_1^2\cdot C_1^1}{2!}\times3!=90$

(2)按(3，2，1)分 3 人　⇒　$C_3^6\cdot C_2^3\cdot C_1^1\times3!=360$

(3)按(2，2，2)分 3 人　⇒　$\frac{C_2^6\cdot C_2^4\cdot C_2^2}{3!}\times3!=90$

∴　所求 $=90+360+90=540$

21.將 6 件物品放入 4 個箱子中，物品不同，箱子相同，每箱至少一個，有__________種放法。

答案：65

解析：

先分箱：(1，1，1，3)，(1，1，2，2)

故有 $C_1^6C_1^5C_1^4C_3^3\cdot\frac{1}{3!}+C_1^6C_1^5C_2^4C_2^2\cdot\frac{1}{2!2!}=20+45=65$ 種

22.滿足 $xyz=4000$ 之所有整數解$(x，y，z)$，共有__________組。

答案：840

解析：

$xyz=4000=2^5\cdot5^3$

$$\because\ \begin{cases}x\mid4000\\y\mid4000\\z\mid4000\end{cases}\quad\therefore\ \begin{cases}x=2^\alpha\cdot5^a\\y=2^\beta\cdot5^b\\z=2^\gamma\cdot5^c\end{cases}\text{且}\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=5，\alpha，\beta，\gamma\in N\cup\{0\}\\a+b+c=3，a，b，c\in N\cup\{0\}\end{cases}$$

⇒　$x，y，z$ 之正整數解有 $H_5^3\cdot H_3^3$組解

∵　$(x，y，z)$之整數解有(+，+，+)，(+，−，−)，(−，+，−)，(−，−，+)四種類型

∴　整數解$(x，y，z)$共有$(H_5^3\cdot H_3^3)\cdot4=C_5^7\cdot C_3^5\cdot4=21\cdot10\cdot4=840$ 組

23.(1)5 對夫婦任選出 4 人代表，此 4 人中恰有一對夫婦，共__________種。

(2)5 對夫婦圍圓桌，不計方位，男女相間，有一對夫婦 A，a 相鄰，有__________種坐法。

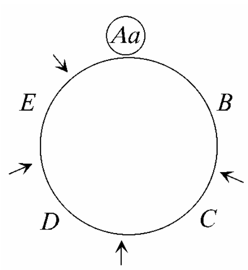
(3)5 對夫婦圍圓桌，不計方位，每對夫婦均相對而坐，有__________種方法。

答案：(1)120　(2)1152　(3)384

解析：

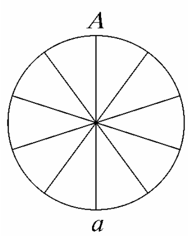
(1) $\underbrace{C_1^5}_{\text{選 1 對夫婦作代表}}\underbrace{C_2^4}_{\text{選 2 對夫婦}}\cdot\underbrace{2^2}_{\text{選夫或婦}}=120$

(2) $\frac{5!}{5}\times\underbrace{2!}_{Aa\text{ 可交換}}\times\underbrace{4!}_{bcde\text{ 之排法}}=1152$



(3) A，a 先相對入坐，坐法有 $\frac{2!}{2}$，再讓四對夫婦入坐有 4！種坐法

而此四對夫婦可對調有 2^4 種方法，故所求爲 $\frac{2!}{2}\times 4!\times 2^4=384$



24.從 1 到 9 的自然數中，任取三個數，試就以下條件，求其方法數，

(1)三數之和爲奇數__________。　(2)三數之積爲 3 的倍數__________。

(3)三數成等差數列__________。

答案：(1)40　(2)64　(3)16

解析：

(1) $\begin{cases}\text{奇}:1,3,5,7,9\\ \text{偶}:2,4,6,8\end{cases}$

三數之和爲奇數有二種：①3 奇　②1 奇 2 偶

所求$=C_3^5+C_1^5C_2^4=10+30=40$

(2) $\begin{cases}3k:3,6,9\\ \text{非}3k:1,2,4,5,7,8\end{cases}$

三數之積爲 3 的倍數有三種

①一（$3k$）二（非 $3k$）　②二（$3k$）一（非 $3k$）　③三（$3k$）

所求$=C_1^3C_2^6+C_2^3C_1^6+C_3^3=3\cdot 15+3\cdot 6+1=45+18+1=64$

(3)a，b，c 成等差，則 $a+c=2b$，即 a，c 同爲奇數或同爲偶數

所求$=C_2^5+C_2^4=10+6=16$

25.5 本相同的高二數學課本，4 本相同的高二英文課本，全分給甲，乙，丙三人，每人至少一本書，有__________種分法。

答案：228

解析：

$H_5^3 \times H_4^3 - H_5^2 \times H_4^2 \times 3 + H_5^1 \times H_4^1 \times 3 = 21 \times 15 - 6 \times 5 \times 3 + 1 \times 1 \times 3 = 228$（種）

26.有 8 雙不同的鞋子，從中任取 6 隻，恰含 2 雙的取法有__________種。

答案：1680

解析：

先從 8 雙中取出 2 雙，取法有 C_2^8 種

再從剩下的 6 雙中選取 2 雙，每雙各取 1 隻，取法有 $C_2^6 \times C_1^2 \times C_1^2$ 種

故 6 隻恰含 2 雙的取法爲 $C_2^8 \times C_2^6 \times C_1^2 \times C_1^2$=1680 種

27.下圖中至少包含 A 或 B 兩點之一的長方形共有__________個。

$A\bullet$		$B\bullet$

答案：15

解析：

包含 A 點的長方形有 $C_1^3 \times C_1^3 = 9$，包含 B 點的長方形有 $C_1^3 \times C_1^3 = 9$

包含 A，B 的長方形有 $C_1^3 = 3$　∴　包含 A 或 B 者有 $9 + 9 - 3 = 15$ 個

28.有 6 件物品全放入 3 個箱子，任意放（可放在同一箱或不同箱），則

(1)物品相同，箱子相異，放法有__________種。

(2)物品相異，箱子相同，放法有__________種。

(3)物品相同，箱子相同，放法有__________種。

(4)物品相異，箱子相異，放法有__________種。

答案：(1) 28　(2) 122　(3) 7　(4) 729

解析：

(1) 6 件相同物全放入 3 個箱子的放法，只看每個箱子中放入的個數

故放法有 $H_6^3 = C_6^8 = 28$ 種

(2)先安排箱子中物品的個數，確定後再取物品（即爲分堆的方式）

(6，0，0)有 1 種，(5，1，0)有 $C_5^6 = 6$ 種，(4，2，0)有 $C_4^6 = 15$ 種

(4，1，1)有 $\dfrac{C_4^6 \times C_1^2 \times C_1^1}{2!} = 15$ 種，(3，3，0)有 $\dfrac{C_3^6 \times C_3^3}{2!} = 10$ 種

(3，2，1)有 $C_3^6 \times C_2^3 \times C_1^1 = 60$ 種，(2，2，2)有 $\dfrac{C_2^6 \times C_2^4 \times C_2^2}{3!} = 15$ 種

共有 $1 + 6 + 15 + 15 + 10 + 60 + 15 = 122$ 種

(3)物品相同，箱子相同，只看物品個數安排方式，由(2)中的分類有 7 種

(4)相異物的重複排列：每件物品有 3 種放法　∴　放法有 $3^6 = 729$ 種