

高雄市明誠中學 高二數學平時測驗					日期：93.04.09
範圍	2-12(2)集合個數	班級		姓名	
	乘法、加法原理	座號			

一、複選題(每題 10 分)

1. 設  $A \in N$  且  $1 \leq A \leq 500$ ，則下列何者正確？

- (A) 不為 5 的倍數之  $A$  值有 400 個 (B) 為 2 或 3 的倍數之  $A$  值有 333 個  
 (C) 為完全平方數或完全立方數之  $A$  值有 25 個  
 (D) 不為 2，不為 3 且不為 5 的倍數之  $A$  值有 124 個 (E) 與 28 互質之  $A$  值有 214 個

答案：(A)(B)(E)

解析：

(A) 對。  $500 - \left[ \frac{500}{5} \right] = 500 - 100 = 400$

(B) 對。  $\left[ \frac{500}{2} \right] + \left[ \frac{500}{3} \right] - \left[ \frac{500}{6} \right] = 250 + 166 - 83 = 333$

(C) 對。  $A$ ：平方數， $A = \{1^2, 2^2, \dots, 22^2\}$ ， $n(A) = 22$

$B$ ：立方數， $B = \{1^3, 2^3, \dots, 7^3\}$ ， $n(B) = 7$

$A \cap B = \{1^6, 2^6\}$ ， $n(A \cap B) = 2$ ， $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 22 + 7 - 2 = 27$

(D) 對。  $n(A_2 \cup A_3 \cup A_5)$

$= n(A_2) + n(A_3) + n(A_5) - n(A_6) - n(A_{15}) - n(A_{10}) + n(A_{30})$

$= \left[ \frac{500}{2} \right] + \left[ \frac{500}{3} \right] + \left[ \frac{500}{5} \right] - \left[ \frac{500}{6} \right] - \left[ \frac{500}{15} \right] - \left[ \frac{500}{10} \right] + \left[ \frac{500}{30} \right]$

$= 250 + 166 + 100 - 83 - 33 - 50 + 16 = 366$

所求  $= 500 - 366 = 134$

(E) 對。  $28 = 2^2 \times 7$

$n(A_2 \cup A_7) = n(A_2) + n(A_7) - n(A_{14}) = \left[ \frac{500}{2} \right] + \left[ \frac{500}{7} \right] - \left[ \frac{500}{14} \right] = 250 + 71 - 35 = 286$

所求  $= 500 - 286 = 214$

2. 自然數  $k$  個，其中 2 的倍數者有 50 個，3 的倍數者有 30 個，4 的倍數者有 14 個，6 的倍數者有 10 個，12 的倍數者有 4 個，下列何者不正確？

- (A)  $k = 60$  (B) 為 2 的倍數但不為 3 的倍數者有 40 個  
 (C) 為 3 的倍數但不為 2 的倍數者有 20 個 (D) 為 3 或 4 的倍數者有 30 個  
 (E) 不為 3 或不為 4 的倍數者有 20 個

答案：(A)(D)(E)

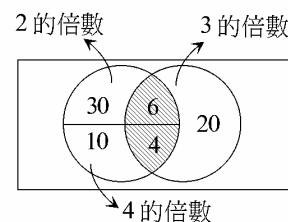
解析：

如右圖所示

(A)  $k = 30 + 10 + 6 + 4 + 20 = 70$  (B)  $30 + 10 = 40$  (個)

(C) 20 個 (D)  $10 + 6 + 4 + 20 = 40$  (個)

(E) 30 (個)



3. 某班學生有 52 人參加數學測驗，試題  $A, B, C$  三大題，答對  $A$  者有 37 人，答對  $B$  者有 30 人，答對  $C$  者有 25 人，答對  $A, B$  者有 20 人，答對  $A, C$  者有 16 人，答對  $B, C$  者有 13 人，三題均答對者有 5 人，則
- (A) 三題均答錯者有 4 人      (B) 恰對一題者有 10 人      (C) 至少對一題者有 48 人  
 (D) 至少對兩題者有 38 人      (E) 恰對  $A$  一題者有 6 人

答案：(A)(C)(E)

解析：

設答對  $A, B, C$  題者所成集合分別為  $A, B, C$ ，則

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$$

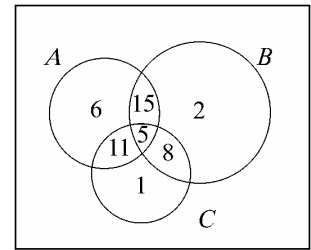
$$= 37 + 30 + 25 - 20 - 13 - 16 + 5 = 48 \text{ (至少對一題)}$$

$$\Rightarrow n(A' \cap B' \cap C') = n((A \cup B \cup C)') = 52 - 48 = 4 \text{ (三題均答錯)}$$

$$\text{由圖知 } n(A \cap B' \cap C') + n(A' \cap B \cap C') + n(A' \cap B' \cap C)$$

$$= 6 + 2 + 1 = 9 \text{ (恰對一題)}$$

$$\text{至少對二題者} = 15 + 11 + 8 + 5 = 39; \text{恰對 } A \text{ 一題者} = 6$$



## 二、填充題(每題 10 分)

4. 從 1、2、3、4、5、6、7 七個數中，組成數字不重複的三位數，則其中
- (1) 4 的倍數有 \_\_\_\_\_ 個。(2) 3 的倍數有 \_\_\_\_\_ 個。

答案：(1)35 (2)78

解析：

(1) 先取末兩位：12, 16, 24, 32, 36, 52, 56，其百位數有五個選擇，共  $5 \times 7 = 35$  個

(2) 將 7 個數字分三類： $3k$  型者有 3, 6， $3k+1$  型者有 1, 4, 7， $3k+2$  型者有 2, 5

①  $3k$  型取 1 個， $3k+1$  型取 1 個， $3k+2$  型取 1 個排列之三位數有  $2 \times 3 \times 2 \times 3! = 72$  個

②  $3k+1$  型取 3 個排列之，三位數有  $1 \times 3! = 6$  個

$$\therefore \text{三位數有 } 72 + 6 = 78 \text{ 個}$$

5. 如右圖，由  $A$  到  $B$  不回頭 ( $\uparrow \downarrow \rightarrow$ ) 的走法

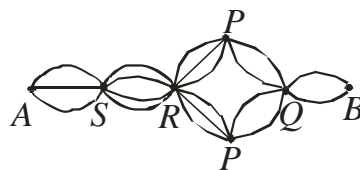
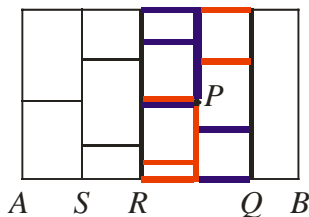
(1) 有 \_\_\_\_\_ 種。(2) 必經過  $P$  點，則走法有 \_\_\_\_\_ 種。

答案：(1) 480 (2) 288

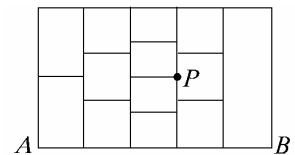
解析：

$$(1) 3 \times 4 \times 5 \times 4 \times 2 = 480$$

(2) 藍線過  $P$  後必須向下，紅線過  $P$  後必須向上



$$3 \times 4 \times (3 \times 2 + 3 \times 2) \times 2 = 288$$



6. 設  $A = \{x \in R \mid |x - 1| \leq 3\}$ ,  $B = \{x \in R \mid |x + 1| \leq k\}$ , 若  $A \subset B$ , 則  $k$  的最小值 = \_\_\_\_\_。

答案：5

解析：

$$x \in A \Rightarrow |x - 1| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq x - 1 \leq 3 \Rightarrow -2 \leq x \leq 4$$

$$x \in B \Rightarrow |x + 1| \leq k \Rightarrow -k \leq x + 1 \leq k \Rightarrow -k - 1 \leq x \leq k - 1$$

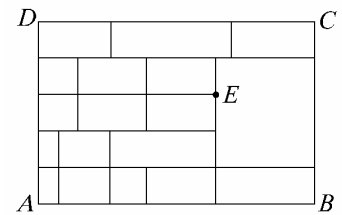
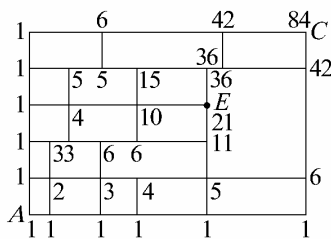
$$\because A \subset B \Rightarrow k - 1 \geq 4 \text{ 且 } -k - 1 \leq -2 \Rightarrow k \geq 5 \text{ 且 } k \geq 1 \Rightarrow k \geq 5$$

故  $k$  的最小值 = 5

7. 某地街道圖如右，則由  $A \rightarrow E$  走捷徑有 \_\_\_\_\_ 種走法， $A \rightarrow C$  走捷徑有 \_\_\_\_\_ 種走法。

答案：21 種；84 種

解析：



8. 教室有五門，甲、乙二人由不同門進入，由不同門出來，且各人不可由同一門進出，則有 \_\_\_\_\_ 種走法。

答案：260

解析：

$$\text{進入：} 5 \times 4 = 20$$

$$\text{出來：(1) 甲由乙進之門出：} 1 \times 4 = 4$$

$$\text{(2) 甲不由乙進之門出：} 3 \times 3 = 9$$

$$\therefore \text{出來有 } 4 + 9 = 13 \text{ 種}$$

$$\text{進出共有 } 20 \times 13 = 260 \text{ 種}$$

9. 如圖，以 6 種不同顏色塗在下圖區域中，相鄰區域顏色須相異，則有 \_\_\_\_\_ 種塗法。

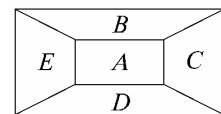
答案：1560

解析：

$$BD \text{ 同色時，} A \rightarrow \boxed{BD} \rightarrow C \rightarrow E : 6 \times 5 \times 1 \times 4 \times 4 = 480 \text{ 種}$$

$$BD \text{ 異色時，} A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow E : 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 3 = 1080 \text{ 種}$$

$$\text{故共有 } 480 + 1080 = 1560 \text{ 種塗法}$$



10. 已知  $A, B, C$  三集合中， $n(A) = n(B) = n(C) = 250$ ，且  $n(A \cap B) = n(B \cap C) = 0$ ，

$$n(A \cap C) = 125，\text{則 } n(B \cup C) = \text{_____}，n(A \cup B \cup C) = \text{_____}。$$

答案：500；625

解析：

$$n(B \cup C) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 250 + 250 - 0 = 500$$

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C) \\ = 250 \times 3 - 125 = 625 \quad (\because n(A \cap B \cap C) = 0)$$

11. 甲地與乙地之間共有六條道路，其中三條是雙向道，兩條是甲地到乙地的單向道，一條是乙地到甲地的單向道。今有一人從甲地騎車到乙地，請問有多少路徑供他選擇？\_\_\_\_；如果他從甲地騎車到乙地，再騎回甲地，那麼他有多少方法？\_\_\_\_\_。

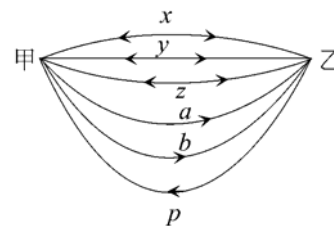
答案：5；20

解析：

(1) 甲到乙的路徑有 5 條

(2) 甲到乙再回到甲的路徑

先由甲到乙有 5 條走法，再由乙到甲有 4 條走法，  
共  $5 \times 4 = 20$  條路徑



12. 若  $A = \{x \mid x = 3k + 1, k \in \mathbb{Z}, 1 \leq x \leq 300\}$ ,  $B = \{x \mid x = 5n + 2, n \in \mathbb{Z}, 1 \leq x \leq 300\}$ , 則

(1)  $n(A) =$ \_\_\_\_\_。 (2)  $n(A \cap B) =$ \_\_\_\_\_。

答案：(1)100 (2)19

解析：

$$\because 1 \leq x \leq 300, x = 3k + 1, k = 0, 1, 2, \dots, 99 \quad \therefore n(A) = 100$$

$$1 \leq x \leq 300, x = 5n + 2, n = 0, 1, 2, \dots, 59 \quad \therefore n(B) = 60$$

$$\text{當 } x \in A \cap B \text{ 時, 共同項 } x = 15r + 7, r \in \mathbb{Z} \Rightarrow r = 0, 1, 2, \dots, 19 \Rightarrow n(A \cap B) = 19$$

13. 將 60 元硬幣，換成 1 元，5 元，10 元的硬幣，有幾種換法？\_\_\_\_\_

答案：49

解析：

$$\text{設 1 元換 } x \text{ 個, 5 元換 } y \text{ 個, 10 元換 } z \text{ 個} \Rightarrow x + 5y + 10z = 60$$

$x$	60	55	50	...	0	50	45	...	0	40	35	...	0	...	...	...	...	10	5	0	0		
$y$	0	1	2	...	12	0	1	...	10	0	1	...	8	...	...	...	...	0	1	2	0		
$z$	0					1					2					...					5		6
	13 組					11 組					9 組					...					3 組		1 組

共有  $13 + 11 + 9 + 7 + 5 + 3 + 1 = 49$  組換法