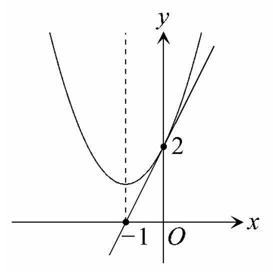
高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：93.03.17					
範圍	1-4 直線與錐線關係 +Ans	班級		姓名	
		座號			

一、單選題(每題 10 分)

1. 已知拋物線Γ 的方程式爲 $y=(x+1)^2+1$，且直線 $y=2x+2$ 與Γ 相切，設 L 爲斜率等於 2 的直線，若 L 與Γ 有兩個交點，則 L 上任一點 P 的坐標 $(x，y)$ 滿足下列哪個關係式？（如下圖）



(A) $y>(x+1)^2+1$ (B) $y<(x+1)^2+1$ (C) $y=(x+1)^2+1$
(D) $y>2x+2$ (E) $y<2x+2$

Ans：(D)

解析：

由圖形知，L 在切線 $y=2x+2$ 的上方

故 L 上的 y 坐標大於 $y=2x+2$ 上的 y 坐標（同一 x 值）

即 L 上之點 $(x，y)$ 滿足 $y>2x+2$

2. 下列哪一條直線與拋物線 $y=x^2$ 相切？

(A) $y=x-\frac{1}{4}$ (B) $y=x-\frac{1}{3}$ (C) $y=x-\frac{1}{6}$ (D) $y=x-\frac{1}{5}$ (E) $y=x-1$

Ans：(A)

解析：

直線與拋物線相切，則判別式= 0

(A) $\begin{cases} y=x^2 \\ y=x-\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow x^2-x+\frac{1}{4}=0$，$D=1^2-4\times\frac{1}{4}=0$

(B)(C)(D)(E)之 D 均不爲 0 $\therefore$ (A)正確

二、複選題(每題 10 分)

3. 下列何者爲 $y^2-4x-2y+1=0$ 的切線？

(A) $x=0$ (B) $x=1$ (C) $y=1$ (D) $4x-2y+3=0$ (E) $2x+3y+6=0$

Ans：(A)(D)

解析：

原式 $\Rightarrow (y-1)^2=4x$

(A) $x=0$ 代入得 $(y-1)^2=0 \Rightarrow y=1$，有唯一解

(B) $x=1$ 代入得 $(y-1)^2=4 \Rightarrow y=-1$ 或 3，有 2 解

(C) $y=1$ 代入得 $x=0$，不爲函數 $\therefore$ $y=1$ 不是其切線

(D) $4x-2y+3=0$ 代入得 $(x-\frac{1}{4})^2=0 \Rightarrow x=\frac{1}{4}$，有唯一解

(E) $2x+3y+6=0$ 代入得 $y^2+4y+13=0$，$D=4^2-4\cdot 13=-36<0$ $\therefore$ 無解

4. 一直線 L 與一雙曲線Γ 的交點個數可能爲(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

Ans：(A)(B)(C)

解析：

一直線與一個二次曲線至多有兩個交點

5. 已知雙曲線Γ：$\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=1$，過下列哪些點作$\Gamma$ 之切線恰有一條？

(A)(0，0)　(B)(4，1)　(C)(3，$\dfrac{4}{\sqrt{5}}$)　(D)($\sqrt{5}$，-2)　(E)(1，2)

Ans：(C)(D)

解析：

(A)(0，0)為中心，過中心沒有切線

(B)$\dfrac{4^2}{5}-\dfrac{1}{4}>1$，點(4，1)與焦點在同一區域內，過(4，1)沒有切線

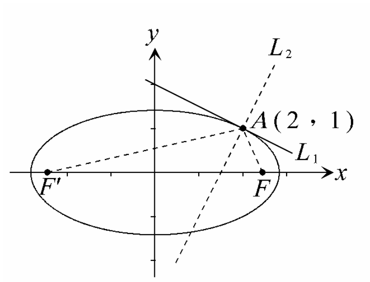
(C)(3，$\dfrac{4}{\sqrt{5}}$)在Γ 上，過此點恰有一條切線

(D)($\sqrt{5}$，-2)在漸近線 $2x+\sqrt{5}\,y=0$ 上，過此點恰有一條切線

(E)$\dfrac{1^2}{5}-\dfrac{2^2}{4}=\dfrac{1}{5}-1<1$，點(1，2)與中心(0，0)在同一區域內且不在漸近線上

過點(1，2)有兩條切線

三、填充題(每題 10 分)



1. 設F與F'為橢圓$x^2+4y^2=8$ 的兩焦點，若A的坐標為(2，1)，求$\angle FAF'$的角平分線方程式__________。

Ans：$2x-y=3$

解析：

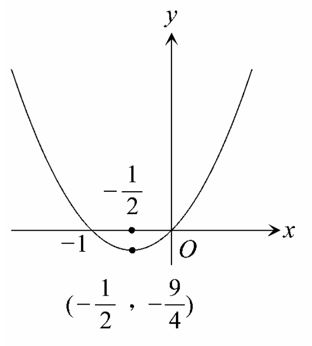
過A(2，1)之切線L_1：$2x+4y=8$，

由光學性質可知$\angle FAF'$的角平分線為過A之法線L_2

$\because$　$L_2\perp L_1$　$\therefore$　設L_2：$y-1=2(x-2)$　$\Rightarrow$　L_2：$2x-y=3$

2. 設k為定數，拋物線$y=x^2+kx$與直線$y=x$恰交於一點，則$k=$__________，此拋物線以頂點為切點的切線方程式為__________。

Ans：1；$y=\dfrac{-1}{4}$



解析：

$y=x^2+kx$與直線$y=x$恰交一點時，$x=x^2+kx$必恰有一個實數解

$x^2+(k-1)\,x=0$ 恰有一實根，$\triangle=b^2-4ac=(k-1)^2=0$，所以$k=1$

拋物線的方程式為$y=x^2+x$，即$(x+\dfrac{1}{2})^2=y+\dfrac{1}{4}$，其頂點為($\dfrac{-1}{2}$，$\dfrac{-1}{4}$)

過頂點的水平線為以頂點為切點的切線，其方程式為$y=\dfrac{-1}{4}$

3. 設橢圓Γ：$x^2+6y^2=10$，則以點(2，-1)為切點的切線方程式為__________。

Ans：$x-3y-5=0$

解析：

設Γ：$x^2+6y^2=10$ 以(2，-1)為切點的切線 $2\,x+6(-1)\,y=10$

即切線方程式為$x-3y-5=0$

4. 設橢圓Γ：$4x^2+y^2=8$，則過點(1，2)的切線方程式爲__________，已知$A(0，4)$，$B(-3，1)$，點P在Γ上，則△PAB面積的最大值= __________。

Ans：$2x+y=4$；$\dfrac{3(4+\sqrt{10})}{2}$

解析：

橢圓Γ：$4x^2+y^2=8$，則由切線公式可知

以(1，2)爲切點的切線方程式爲 $4\cdot1\cdot x+2\cdot y=8$，即 $2x+y=4$

$4x^2+y^2=8\ \Rightarrow \dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{8}=1$，設$P(\sqrt{2}\cos\theta, 2\sqrt{2}\sin\theta)$在橢圓上，又$A(0，4)$，$B(-3，1)$，

$$\triangle PAB\text{的面積 }=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}1 & 0 & 4\\ 1 & -3 & 1\\ 1 & \sqrt{2}\cos\theta & 2\sqrt{2}\sin\theta\end{vmatrix}\right|,$$

即△PAB的面積 $=\dfrac{1}{2}|\ -6\sqrt{2}\sin\theta+3\sqrt{2}\cos\theta\ +12|=\dfrac{3}{2}|\ \sqrt{10}\sin(\theta-\phi)\ +4|$

故△PAB面積的最大值 $=\dfrac{3}{2}\times(\sqrt{10}\ +4)=\dfrac{3(4+\sqrt{10})}{2}$

5. 橢圓$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{8}=1$與直線 $2x-y+2=0$ 交於A，B，

(1) $\overline{AB}$ 之中點爲__________。(2)弦長 $\overline{AB}=$ __________。

Ans：(1)$(-\dfrac{1}{2}，1)$　(2)$\sqrt{15}$

解析：

(1)$\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{8}=1\\ 2x-y+2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4x^2+y^2=8\\ 2x-y+2=0\Rightarrow y=2(x+1)\end{cases}$

$\Rightarrow\ 4x^2+4(x+1)^2=8\ \Rightarrow\ 2x^2+2x-1=0\ \Rightarrow$設二根$x_1, x_2$，$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

且$\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{2}{2}=-1\\ x_1x_2=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$，又$\begin{cases}y_1=2(x_1+1)\\ y_2=2(x_2+1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y_1-y_2=2(x_1-x_2)\\ y_1+y_2=2(x_1+x_2)+4\end{cases}$

$\therefore\ \overline{AB}$ 中點爲 $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)\Rightarrow\left(\dfrac{-1}{2},\dfrac{2(-1)+2}{2}\right)=\left(-\dfrac{1}{2}，1\right)$

(2) $\overline{AB}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+4(x_1-x_2)^2}==\sqrt{5(x_1-x_2)^2}$

因爲$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=(-1)^2-4(-\dfrac{1}{2})=3$，故$\overline{AB}=\sqrt{15}$

6. 若橢圓$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$與直線$y=mx+3$ 相切，則$m=$__________。

Ans：$\pm\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

解析：

$y=mx+3$ 代入$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$中，得$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{(mx+3)^2}{4}=1\ \Rightarrow\ 4x^2+9(mx+3)^2=36$

$\Rightarrow\ \ 4x^2+9m^2x^2+54mx+81-36=0$，整理得$(4+9m^2)x^2+54mx+45=0$

$\because$ 橢圓$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$與直線$y=mx+3$相切 $\therefore$ 判別式$D=(54m)^2-4(4+9m^2)\cdot 45=0$

$\Rightarrow\ \ 81m^2-20-45m^2=0\ \ \Rightarrow\ \ m^2=\dfrac{5}{9}\ \ \Rightarrow\ \ m=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

7. 已知直線$y=2x+k$與雙曲線$x^2-4y^2=4$相切，則實數k之值為__________。

Ans：$\pm\sqrt{15}$

解析：

$$\begin{cases} y=2x+k \quad \cdots\cdots① \\ x^2-4y^2=4 \cdots\cdots② \end{cases}$$

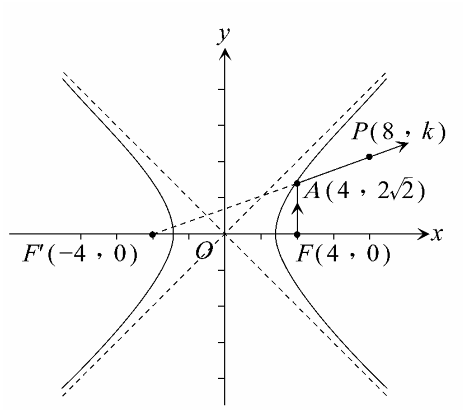
①代入② $\Rightarrow\ \ 15x^2+16kx+4(k^2+1)=0$

$\because$ 相切 $\therefore$ 判別式 $=(16k)^2-4\times 15\times 4(k^2+1)=0$，得$k=\pm\sqrt{15}$

8. 雙曲線Γ：$\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{8}=1$，又$A\in\Gamma$，已知$A(4，2\sqrt{2})$，$F(4，0)$，若由$F$射至$A$之光線被雙曲線$\Gamma$反射，反射光通過$P(8，k)$，則$k=$__________。

Ans：$3\sqrt{2}$

解析：



由光學性質可知反射光線必通過直線$\overleftrightarrow{F'A}$，

$m_{F'A}=\dfrac{2\sqrt{2}-0}{4-(-4)}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

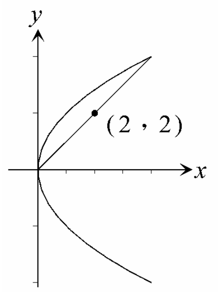
$\overleftrightarrow{F'A}$：$y-0=\dfrac{\sqrt{2}}{4}(x+4)$，$P(8,k)$代入$\overleftrightarrow{F'A}$ $\Rightarrow\ \ k=3\sqrt{2}$

9. 若雙曲線$y^2-x^2=a^2$與直線$x+2y=3$相切於點$(x_0，y_0)$，則$x_0：y_0：a^2=$__________。

Ans：$(-1)：2：3$

解析：切線為$y_0y-x_0x=a^2$為$x+2y=3$，故$x_0：y_0：a^2=(-1)：2：3$

10.設拋物線$y^2=4x$上一弦以$(2，2)$為中點，則此弦所在的直線方程式為__________，又弦長 $=$__________。



Ans：$x-y=0$；$4\sqrt{2}$

解析：

設拋物線$y^2=4x$，以$(2，2)$為弦中點的弦所在的直線為$y-2=m(x-2)$

（其中m為斜率），則$\begin{cases} y^2=4x \\ y=mx-2m+2 \end{cases}$，

可得$(mx-2m+2)^2=4x\Rightarrow m^2x^2+(-4m^2+4m-4)x+(4m^2-8m+4)=0\cdots\cdots(※)$，

設此弦二端點$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$，則(※)之二根$x_1,x_2\Rightarrow x_1+x_2=-\dfrac{-4m^2+4m-4}{m^2}=2\times 2$，

$\Rightarrow m=1$，所以所求的弦所在的直線方程式為 $y-2=1(x-2)$，亦即$x-y=0$

當$m=1$時，(※)式整理後$x^2-4x=0$，即$x=0$或4，當$x=0$時$y=0$，，而$x=4$時，$y=4$，

所以兩交點(0，0)，(4，4)，所以弦長 $=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$

11.已知橢圓方程式爲 $\dfrac{(x-1)^2}{4}+\dfrac{(y-1)^2}{16}=1$，則此橢圓焦點坐標爲__________，若自左邊焦點F上發射一直線光，打在橢圓某一點P，再自P反射，最後需落在F'上，則此光線最少需走多少距離？__________。若將上圖沿 $\bar{v}=(-1，2)$移動$|\bar{v}|$長，得到新圖形之方程式爲__________。

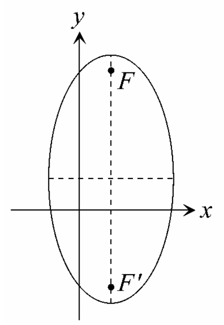
Ans：$(1，1\pm 2\sqrt{3})$，8，$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{(y-3)^2}{16}=1$

解析：

橢圓方程式：$\dfrac{(x-1)^2}{4}+\dfrac{(y-1)^2}{16}=1$，中心(1，1)，$a^2=16$，$a=4$，$b^2=4$，$b=2$

$\Rightarrow\quad c^2=a^2-b^2=16-14=12\quad\therefore\quad c=\pm 2\sqrt{3}\quad\therefore$　焦點坐標爲$(1，1\pm\ 2\sqrt{3})$

設$P(x，y)$，由定義：$|\overline{PF}+\overline{PF'}|=2a=2\cdot 4=8$



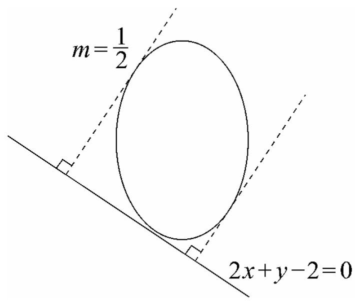
中心(1，1)沿 $\bar{v}=(-1，2)$移動後之新中心爲$(x，y)$

$\Rightarrow\quad (x-1，y-1)=(-1，2)\quad\Rightarrow\quad (x，y)=(0，3)$

$\therefore$　新方程式爲 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{(y-3)^2}{16}=1$

12.橢圓 $\dfrac{(x+2)^2}{4}+\dfrac{(y+3)^2}{9}=1$ 在直線 $2x+y-2=0$ 上的正射影長爲______。

Ans：$4\sqrt{2}$



解析：

與直線 $2x+y-2=0$ 垂直之直線斜率爲 $\dfrac{1}{2}$

而橢圓斜率爲 $\dfrac{1}{2}$ 的切線爲 $y+3=\dfrac{1}{2}(x+2)\pm\sqrt{4\cdot\dfrac{1}{4}+9}$

$\Rightarrow\quad x-2y=4\pm 2\sqrt{10}$

令L_1：$x-2y=4+2\sqrt{10}$，L_2：$x-2y=4-2\sqrt{10}$

則所求爲 $d(L_1，L_2)=\dfrac{|(4+2\sqrt{10})-(4-2\sqrt{10})|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=4\sqrt{2}$

13.設直線$y=x+k$與橢圓 $4x^2+y^2=4$ 相切，則k之値爲__________。

Ans：$\pm\sqrt{5}$

解析：

直線$y=x+k$與橢圓 $4x^2+y^2=4$ 相切　$\Rightarrow\quad 4x^2+(x+k)^2=4\quad\Rightarrow\quad 5x^2+2kx+k^2-4=0$

$\Rightarrow\quad D=(2k)^2-4\cdot 5\cdot(k^2-4)=0\quad\Rightarrow\quad k^2-5k^2+20=0\quad\Rightarrow\quad 4k^2=20\quad\Rightarrow\quad k=\pm\sqrt{5}$

14.若雙曲線$y^2-x^2=a^2$與直線$x+2y=3$ 相切，則$a^2=$__________，切點坐標爲__________。

Ans：3；$(-1，2)$

解析：

$y^2-x^2=a^2$與$x+2y=3$ 相切　$\Rightarrow\quad y^2-(3-2y)^2=a^2\quad\Rightarrow\quad 3y^2-12y+a^2+9=0$ 有等根

令判別式為 0，得$(-6)^2-3(a^2+9)=0 \Rightarrow a^2=3$　又 $3y^2-12y+12=0$

$\Rightarrow y^2-4y+4=0 \Rightarrow y=2$ 代入$x+2y=3$ 得$x=-1$，故切點為$(-1，2)$

15.雙曲線Γ：$x^2-y^2=8$，$A(1，1)$，由A向Γ 作切線，則切線方程式為＿＿＿＿＿。

Ans：$9x+7y-16=0$

解析：

設切線L：$y-1=m(x-1)$，$\begin{cases} L：y=mx+(1-m) \cdots\cdots ① \\ \Gamma：x^2-y^2=8 \quad \cdots\cdots ② \end{cases}$

①代入② $\Rightarrow (1-m^2)x^2+2m(m-1)x+(2m-m^2-1-8)=0$

$\because$ 相切 $\therefore D=4m^2(m-1)^2-4(1-m^2)(2m-m^2-9)=0 \Rightarrow 4(m-1)(7m+9)=0$

$\Rightarrow m=\frac{-9}{7}$ 或$m=1$（不合 $\because$ $m=1$ 時，切線L與其中一條漸近線重合）

$\therefore L：y-1=\frac{-9}{7}(x-1) \Rightarrow 9x+7y-16=0$

16.設橢圓Γ：$x^2+4y^2=180$，求過$P(10，5)$的切線方程式，若兩切線之切點為A，B，則$\overleftrightarrow{AB}$的方程式為何？

Ans：$x+4y=30$ 或 $x+y=15$；$x+2y=9$

解析：

$10^2+5^2\times 4=200>180 \quad \therefore P(10，5)$在橢圓的外部，而$x^2+4y^2=180 \Rightarrow \frac{x^2}{180}+\frac{y^2}{45}=1$

設此切線為$y=mx\pm\sqrt{180m^2+45}$，過$(10，5) \Rightarrow 5-10m=\pm\sqrt{180m^2+45}$

$\Rightarrow 25-100m+100m^2=180m^2+45 \Rightarrow 80m^2+100m+20=0 \Rightarrow 4m^2+5m+1=0$

$\Rightarrow (4m+1)(m+1)=0 \quad \therefore m=-\frac{1}{4}$ 或 -1，由點斜式知兩切線為

$(y-5)=-\frac{1}{4}(x-10)$或$(y-5)=-1(x-10)$，即$x+4y=30$ 或$x+y=15$

而切點弦 $10x+4\times 5\times y=180 \Rightarrow x+2y=9$