高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：93.03.05					
範圍	1-3 雙曲線+ans	班級		姓名	
		座號			

一、單選題(每題 10 分)

1.已知雙曲線 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 上一點 P 到其中一焦點 F 的距離為 4，那麼 P 到另一焦點 F'的距離是多少？(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 10 (E) 12

答案：(D)

解析：

雙曲線 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1 \quad \Rightarrow \quad a^2=9 \quad \Rightarrow \quad a=3$，由雙曲線定義 $|\overline{PF}-\overline{PF'}|=2a$

$\Rightarrow \quad |4-\overline{PF'}|=2\times 3=6 \quad \Rightarrow \quad 4-\overline{PF'}=\pm 6$

$\Rightarrow \quad \overline{PF'}=10$ 或 -2（不合） $\therefore \quad \overline{PF'}=10$

二、複選題(每題 10 分)

2. 關於雙曲線Γ：$9x^2-16y^2=144$ 之敘述，下列何者正確？

(A)兩頂點為(4，0)，(－4，0) (B)兩焦點為(0，5)，(0，－5) (C)共軛軸長為 3

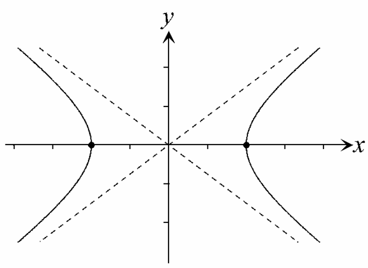
(D)若 P 為Γ 上任一點，則 P 到其兩漸近線之距離乘積為 $\frac{144}{25}$

(E)過點($\frac{4\sqrt{13}}{3}$，2)且與Γ 相切之直線只有一條

答案：(A)(D)(E)

解析：

Γ：$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$，中心$(h，k)=(0，0)$



$a^2=16$，$b^2=9$，$c^2=a^2+b^2=25 \quad \Rightarrow \quad a=4$，$b=3$，$c=5$

(A)對。兩頂點$(h\pm a，k)=(0\pm 4，0)=(\pm 4，0)$

(B)錯。兩焦點$(h\pm c，k)=(0\pm 5，0)=(\pm 5，0)$

(C)錯。共軛軸長 $2b=6$

(D)對。$\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}=\frac{16\times 9}{16+9}=\frac{144}{25}$

(E)對。($\frac{4\sqrt{13}}{3}$，2)$\in\Gamma$，所以過點($\frac{4\sqrt{13}}{3}$，2)且與Γ 相切之直線只有一條

3.動點 $P(x，y)$滿足$|\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}-\sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2}|=k$，下列何者正確？

(A) $k=0$ 表一直線 (B) $k=2$ 時，正焦弦長 $=\frac{21}{2}$ (C) $k=3$ 表一拋物線

(D) $k=5$ 表一射線 (E) $k>5$ 表一雙曲線

答案：(A)(B)

解析：

$|\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}-\sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2}|=k$

$\Rightarrow$ $F'(-2，2)$，$F(1，-2)$且$\overline{FF'}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

(A) $k=0$ 時，$\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}=\sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2}$ $\Rightarrow$ $6x-8y+3=0$ 表一直線

(B) $k=2$ 時 $\because$ $\overline{FF'}=2c=5$ $\Rightarrow$ $c=\dfrac{5}{2}$ $\because$ $2a=2$ $\Rightarrow$ $a=1$

$\therefore$ $b=\sqrt{(\frac{5}{2})^2-1^2}=\dfrac{\sqrt{21}}{2}$ $\therefore$ 正焦弦長 $=\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{2\cdot\frac{21}{4}}{1}=\dfrac{21}{2}$

(C)(D)(E) $0<k<5$ 表雙曲線，$k=5$ 表二射線，$k<5$ 沒有圖形

三、填充題(每題 10 分)

1. 以 $2x+y+1=0$ 與 $2x-y+3=0$ 爲兩漸近線，且經過原點的雙曲線方程式爲__________，它的正焦弦長 = __________。

答案：$\dfrac{(x+1)^2}{\frac{3}{4}}-\dfrac{(y-1)^2}{3}=1$；$4\sqrt{3}$

解析：

設 $2x+y+1=0$，$2x-y+3=0$ 爲兩漸近線的雙曲線方程式爲$(2x+y+1)(2x-y+3)=k$

滿足此雙曲線過原點的條件，$(2\times0+0+1)(2\times0-0+3)=k$，即 $k=3$

此雙曲線方程式爲$(2x+y+1)(2x-y+3)=3$

即 $4x^2-y^2+8x+2y=0$，亦即$\dfrac{(x+1)^2}{\frac{3}{4}}-\dfrac{(y-1)^2}{3}=1$

正焦弦長 $=\dfrac{2b^2}{a}$，其中 $a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$b=\sqrt{3}$，所以正焦弦長 $=4\sqrt{3}$

2. 已知一等軸雙曲線通過點$(-5，-1)$，且一漸近線方程式爲 $x+y+1=0$，貫軸在直線 $x+3=0$ 上，則此雙曲線的另一漸近線方程式爲________________，又其共軛雙曲線的標準式爲______________。

答案：(1) $x-y+5=0$ (2) $\dfrac{(x+3)^2}{5}-\dfrac{(y-2)^2}{5}=1$

解析：

等軸雙曲線 Γ 之一漸近線爲 $x+y+1=0$，其貫軸 $x+3=0$

$\therefore$ 中心$(-3，2)$，另一漸近線 $x-y+5=0$

設 Γ：$(x+y+1)(x-y+5)=k$，Γ 過$(-5，-1)$，代入得 $k=-5$

$\therefore$ Γ：$(x+y+1)(x-y+5)=x^2-y^2+6x+4y+5=-5$

$\Rightarrow$ Γ：$\dfrac{(y-2)^2}{5}-\dfrac{(x+3)^2}{5}=1$，其共軛雙曲線$\dfrac{(x+3)^2}{5}-\dfrac{(y-2)^2}{5}=1$

3. 直線 $2x+y=3$ 與雙曲線 $x^2-y^2=1$ 交於兩點 P，Q，則 $\overline{PQ}$ 中點坐標爲__________，又 $\overline{PQ}$ 之長 = __________。

答案：$(2，-1)$，$\dfrac{2}{3}\sqrt{30}$

解析：

設 $P(x_1，y_1)$，$Q(x_2，y_2)$，$\begin{cases} y = 3-2x \\ x^2-y^2=1 \end{cases}$ 消去 y $\Rightarrow$ $x^2-(3-2x)^2=1$

$\Rightarrow$ $3x^2-12x+10=0$，二根爲 x_1，x_2 $\therefore$ $x_1+x_2=4$，$x_1x_2=\dfrac{10}{3}$

又 $y_1=3-2x_1$，$y_2=3-2x_2$ $\Rightarrow$ $y_1+y_2=6-2(x_1+x_2)=-2$

(1) $\overline{PQ}$ 中點爲$(\dfrac{x_1+x_2}{2}，\dfrac{y_1+y_2}{2})=(2，-1)$

(2) $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=16-\dfrac{40}{3}=\dfrac{8}{3}$，$y_1-y_2=-2(x_1-x_2)$

$\Rightarrow$ $(y_1-y_2)^2=4(x_1-x_2)^2$

$\therefore$ $\overline{PQ}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{5(x_1-x_2)^2}=\sqrt{\dfrac{40}{3}}=\dfrac{2}{3}\sqrt{30}$

4. 設 P 爲雙曲線 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 上一點且位在第一象限，若 F_1，F_2 爲雙曲線的兩個焦點，且 $\overline{PF_1}：\overline{PF_2}=1：3$，則$\triangle F_1PF_2$的周長 = ＿＿＿＿＿。

答案：22

解析：

$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 中，$a^2=9$，$b^2=16$ $\Rightarrow$ $c^2=a^2+b^2=25$ $\Rightarrow$ $c=5$

令 $\overline{PF_1}=k$，則 $\overline{PF_2}=3k$，$\overline{PF_2}-\overline{PF_1}=2a$ $\Rightarrow$ $3k-k=2\times 3=6$ $\Rightarrow$ $k=3$

又 $\overline{F_1F_2}=2c=10$，故$\triangle F_1PF_2$的周長 $=\overline{PF_1}+\overline{PF_2}+\overline{F_1F_2}=3+9+10=22$

5.雙曲線 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{4}=1$ 的正焦弦長 = ＿＿＿＿＿＿，漸近線的方程式爲＿＿＿＿＿＿＿與＿＿＿＿＿。

答案：2；$x+2y=0$；$x-2y=0$

解析：

$\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{4}=1$，$a=4$，$b=2$，正焦弦長 $\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{2\times 2^2}{4}=2$

漸近線$(\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{2})(\dfrac{x}{4}-\dfrac{y}{2})=0$ $\Rightarrow$ $x+2y=0$，$x-2y=0$

6.錐線 $\dfrac{x^2}{12-k}+\dfrac{y^2}{3-k}=1$（$k$ 爲實數）爲一雙曲線時，k 的範圍爲＿＿＿＿＿，其焦點坐標爲＿＿＿＿＿。

答案：$3<k<12$；$(3，0)$，$(-3，0)$

解析：

$\dfrac{x^2}{12-k}+\dfrac{y^2}{3-k}=1$ 爲一雙曲線 $\Rightarrow (12-k)(3-k)<0 \Rightarrow (k-12)(k-3)<0$ $\Rightarrow$ $3<k<12$

此時方程式爲 $\dfrac{x^2}{12-k}-\dfrac{y^2}{k-3}=1$，$a^2=12-k$，$b^2=k-3$ $\Rightarrow$ $c^2=a^2+b^2=9$

$\Rightarrow\quad c = 3$，又貫軸在 x 軸上，中心(0，0)，故焦點為(3，0)，(– 3，0)

7.求雙曲線 $\dfrac{(x-1)^2}{16}-\dfrac{(y+3)^2}{9}=1$ 之兩漸近線交點坐標為__________。

答案：(1， – 3)

解析：雙曲線 $\dfrac{(x-1)^2}{16}-\dfrac{(y+3)^2}{9}=1$ 之兩漸近線交點坐標為雙曲線之中心，即(1， – 3)

8. 有一雙曲線 $|\sqrt{(x+5)^2+(y-3)^2}-\sqrt{(x-5)^2+(y-3)^2}|=8$，求此雙曲線的中心坐標__________、兩條漸近線方程式__________。

答案：(1) (0，3)　(2) $y-3=\pm\dfrac{3}{4}x$

解析：

雙曲線 $|\sqrt{(x+5)^2+(y-3)^2}-\sqrt{(x-5)^2+(y-3)^2}|=8\cdots\cdots$①

兩焦點 $F(5，3)$，$F'(-5，3)$　∴　中心坐標$(\dfrac{5-5}{2}，\dfrac{3+3}{2})=(0，3)$；$2c=10$

由①得 $2a=8\quad\Rightarrow\quad a=4$；$b=\sqrt{a^2-c^2}=3$

$\Rightarrow\quad \dfrac{x^2}{16}-\dfrac{(y-3)^2}{9}=1\quad\Rightarrow$　漸近線 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{(y-3)^2}{9}=0$

$\Rightarrow\quad \dfrac{x}{4}\pm\dfrac{y-3}{3}=0\quad\Rightarrow\quad y-3=\pm\dfrac{3}{4}x$

9.等軸雙曲線 Γ 之中心為(2，1)，正焦弦長 $2\sqrt{2}$，一漸近線方程式為 $x-y-1=0$，

(1) Γ 之標準式為__________。

(2)若 Γ 之貫軸平行 x 軸，則焦點坐標為__________。

答案：(1) $\dfrac{(x-2)^2}{2}-\dfrac{(y-1)^2}{2}=\pm 1$　(2) (0，1)，(4，1)

解析：

另一漸近線為 $(x-2)=-(y-1)\quad\Rightarrow\quad x+y-3=0$　∴　設 Γ：$(x-y-1)(x+y-3)=k$

$\Rightarrow\quad x^2-y^2-4x+2y+3=k\quad\Rightarrow\quad (x-2)^2-(y-1)^2=k$

$\Rightarrow\quad \dfrac{(x-2)^2}{k}-\dfrac{(y-1)^2}{k}=1$ 或 $-\dfrac{(x-2)^2}{-k}+\dfrac{(y-1)^2}{-k}=1$

∴　$a=\sqrt{k}$，$b=\sqrt{k}$ 或 $a=\sqrt{-k}$，$b=\sqrt{-k}$，正焦弦長 $=\dfrac{2k}{\sqrt{k}}=2\sqrt{2}$ 或 $\dfrac{-2k}{\sqrt{-k}}=-2\sqrt{2}$

$\Rightarrow\quad k=\pm 2$，故 $\dfrac{(x-2)^2}{2}-\dfrac{(y-1)^2}{2}=\pm 1$，貫軸平行 x 軸時，$\dfrac{(x-2)^2}{2}-\dfrac{(y-1)^2}{2}=1$

$\Rightarrow\quad a^2=2$，$b^2=2$　∴　$c^2=2+2=4\quad\Rightarrow\quad c=2$，故焦點 $F'(0，1)$，$F(4，1)$

10.雙曲線 $4x^2-y^2-8x-4y+4=0$ 之

(1)頂點坐標為__________。　(2)漸近線方程式為__________。

(3)雙曲線上任一點到二漸近線之距離之積 = __________。

答案：(1) (1， – 4)，(1，0)　(2) $2x-y-4=0$，$2x+y=0$　(3) $\dfrac{4}{5}$

解析：

$4x^2-y^2-8x-4y+4=0 \quad \Rightarrow \quad 4(x-1)^2-(y+2)^2=-4 \quad \Rightarrow \quad -\frac{(x-1)^2}{1}+\frac{(y+2)^2}{4}=1$

$\therefore$ 中心$(1，-2)$，$a=2$，$b=1 \quad \Rightarrow \quad c^2=1+4=5$，頂點$(1，-4)$，$(1，0)$

漸近線 $2x-2=\pm(y+2) \quad \Rightarrow \quad 2x-y-4=0$ 或 $2x+y=0$

任一點到二漸近線之距離之積 $=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}=\frac{4}{5}$

11.求下列圓錐曲線方程式：（請化成標準式）

(1)以 $2x+y+3=0$ 與 $2x-y-1=0$ 爲二漸近線，且過$(0，0)$之雙曲線方程式__________。

(2)長軸一頂點$(9，2)$，短軸一頂點$(5，-1)$且軸平行兩坐標軸之橢圓方程式__________。

(3)軸平行 x 軸且頂點$(1，2)$，正焦弦長爲 8 的拋物線方程式

__________。（二解）

答案：(1) $-\frac{4(x+\frac{1}{2})^2}{3}+\frac{(y+2)^2}{3}=1$ (2) $\frac{(x-5)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$ (3) $(y-2)^2=\pm 8(x-1)$

解析：

(1)設所求雙曲線方程式爲$(2x+y+3)(2x-y-1)=k$，$(0，0)$代入，則 $k=3\times(-1)=-3$

$\therefore$ 雙曲線方程式爲$(2x+y+3)(2x-y-1)=-3$，即 $-\frac{4(x+\frac{1}{2})^2}{3}+\frac{(y+2)^2}{3}=1$

(2)長軸一頂點$(9，2)$，短軸一頂點$(5，-1)$且軸平行兩坐標軸則長軸在 $y=2$ 上，

短軸在 $x=5$ 上，中心$(5，2)\Rightarrow a=4$，$b=3$，故所求橢圓式爲 $\frac{(x-5)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$

(3)軸平行 x 軸且頂點$(1，2) \quad \Rightarrow$ 軸的方程式爲 $y=2$，又 $4|c|=8 \quad \Rightarrow \quad |c|=2$

$\Rightarrow \quad c=\pm 2$，故所求拋物線方程式爲$(y-2)^2=\pm 8(x-1)$

12.錐線Γ ：$\left|\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}-\sqrt{(x-2)^2+(y-5)^2}\right|=4$，求

(1) Γ 的正焦弦長 = __________。

(2) Γ 上任一點到兩條漸近線的距離乘積爲__________。

答案：5，$\frac{20}{9}$

解析：

Γ ：$\left|\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}-\sqrt{(x-2)^2+(y-5)^2}\right|=4$ 中二定點 $F'(2，-1)$，$F(2，5)$

$\overline{FF'}=6>4 \quad \therefore \quad \Gamma$ 表以 F'，F 爲焦點，貫軸長 4 之雙曲線，其貫軸 $x=2$ 平行 y 軸

又 $2a=4$，$2c=6 \quad \Rightarrow \quad a=2$，$c=3 \quad \Rightarrow \quad b^2=c^2-a^2=5$

(1)正焦弦長 $=\frac{2b^2}{a}=5$

(2) Γ 上任一點到兩漸近線的距離乘積 $=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}=\frac{4\times 5}{4+5}=\frac{20}{9}$