高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：93.02.26					
範圍	1-2 橢圓+ans	班級		姓名	
		座號			

一、單選題 (每題 8 分)

1.平面上有一個橢圓，已知其長軸平行於 x 軸，短軸的一端點為 $(-4，0)$，且其中一焦點為 $(0，4)$，則此橢圓長軸的長度為何？

(A) 2 (B) $2\sqrt{2}$ (C) 6 (D) $6\sqrt{2}$ (E) $8\sqrt{2}$

答案：(E)

解析：

短軸的一端點為 $(-4，0)$ $\Rightarrow$ 短軸：$y=0$，焦點 $(0，4)$ 在長軸上 $\Rightarrow$ 長軸：$x=0$

$\therefore$ 中心 $(0，0)$ $\Rightarrow$ $b=4$，$c=4$ $\Rightarrow$ $a=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$

$\therefore$ 長軸長 $=2a=2\times 4\sqrt{2}=8\sqrt{2}$

2.橢圓 $4x^2+9y^2-8x+36y+4=0$，下列何者正確？

(A)中心 $(-1，2)$ (B)長軸長 $=3$ (C)短軸長 $=2$ (D)正焦弦長 $=\dfrac{8}{3}$

(E)長軸方程式為 $x-1=0$

答案：(D)

解析：

$4x^2+9y^2-8x+36y+4=0 \Rightarrow 4(x-1)^2+9(y+2)^2=36 \Rightarrow \dfrac{(x-1)^2}{9}+\dfrac{(y+2)^2}{4}=1$

$\therefore$ $a=3$，$b=2$，故此橢圓的中心 $(1，-2)$，長軸長 $2a=6$，短軸長 $2b=4$

正焦弦長 $=\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{2\cdot 2^2}{3}=\dfrac{8}{3}$，長軸方程式為 $y+2=0$

二、複選題 (每題 8 分)

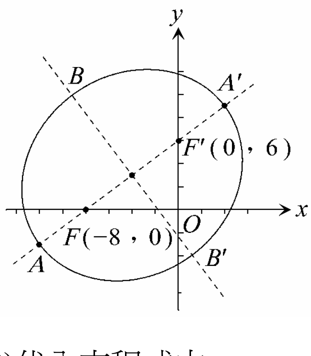
1.有關方程式 $\sqrt{(x+8)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-6)^2}=20$ 之圖形，下列敘述何者為真？

(A)圖形是中心在 $(-4，3)$ 之橢圓 (B)短軸所在之直線斜率為 $\dfrac{3}{4}$ (C)圖形不與坐標軸成對稱

(D)短軸之長為 $5\sqrt{3}$ (E)原點在圖形的內部

答案：(A)(C)(E)

解析：



方程式 $\sqrt{(x+8)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-6)^2}=20$ 之圖形為一橢圓

焦點為 $F(-8，0)$，$F'(0，6)$，長軸長 $2a=20$ $\Rightarrow$ $a=10$，

中心為 $\overline{FF'}$ 之中點 $(-4，3)$，$2c=\overline{FF'}=\sqrt{64+36}=10$ $\Rightarrow$ $c=5$，

$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{100-25}=5\sqrt{3} \Rightarrow$ 短軸長 $2b=10\sqrt{3}$，

長軸在直線 FF'：$3x-4y+24=0$ 上

短軸所在之直線斜率為 $-\dfrac{4}{3}$，且圖形不與坐標軸成對稱，又原點 $(0，0)$ 代入方程式中

$\sqrt{(0+8)^2+0^2}+\sqrt{0^2+(0-6)^2}=14<20$ $\therefore$ 原點在圖形的內部

應選(A)(C)(E)

2.橢圓的中心為$(-1, 2)$，長軸垂直 x 軸，若此橢圓通過點$(2, 3)$，則下列哪些點必在此橢圓上？

(A)$(-4, 3)$ (B)$(-4, 1)$ (C)$(0, 0)$ (D)$(2, 1)$ (E)$(-1, 4)$

答案：(A)(B)(D)

解析：

橢圓Γ 中心$(-1, 2)$且過點$(2, 3)$ $\therefore$ Γ 必過$(-4, 3)$，$(2, 1)$兩點

$\therefore$ Γ 必過$(-4, 1)$ $\therefore$ 設橢圓Γ：$\dfrac{(x+1)^2}{a^2}+\dfrac{(y-2)^2}{b^2}=1$，$b^2>a^2$……①

Γ 過$(2, 3)$ $\therefore$ $\dfrac{(2+1)^2}{a^2}+\dfrac{(3-2)^2}{b^2}=\dfrac{9}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1$……②

$(0, 0)$代入①得$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{4}{b^2}=1$，②代入得$a^2=\dfrac{35}{3}>\dfrac{35}{8}=b^2$，不合

$(-1, 4)$代入①得$\dfrac{0}{a^2}+\dfrac{4}{b^2}=1$，②代入得$b^2=4<12=a^2$，不合

故應選(A)(B)(D)

二、填充題(每題 10 分)

1.橢圓中心$(2, 1)$，長軸在直線$x=2$ 上，過此橢圓長軸之一頂點的二個焦半徑為 2 與 8，

(1)此橢圓之方程式為__________。(2)此橢圓之二焦點為__________。

答案：(1)$\dfrac{(x-2)^2}{16}+\dfrac{(y-1)^2}{25}=1$ (2) $(2, -2)$，$(2, 4)$

解析：

$$\begin{cases} a+c=8 \\ a-c=2 \end{cases} \Rightarrow a=5，c=3 \quad \therefore \quad b=4$$

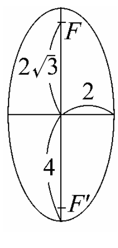
$\therefore$ 橢圓 Γ：$\dfrac{(x-2)^2}{16}+\dfrac{(y-1)^2}{25}=1$，二焦點為$(2, -2)$，$(2, 4)$

2.橢圓 $4x^2+y^2+8x-4y-8=0$ 的

(1)中心坐標為__________。(2)焦點坐標為__________。(3)正焦弦長 $=$__________。

(4)橢圓上任一點到兩焦點的距離和 $=$__________。

(5)內接矩形面積最大值 $=$__________。



答案：(1)$(-1, 2)$ (2)$(-1, 2\pm2\sqrt{3})$ (3) 2 (4) 8 (5) 16

解析：

$4x^2+y^2+8x-4y-8=0 \Rightarrow 4(x+1)^2+(y-2)^2=16 \Rightarrow$

$\dfrac{(x+1)^2}{4}+\dfrac{(y-2)^2}{16}=1$，$b^2=4$，$a^2=16 \Rightarrow c^2=a^2-b^2=12 \Rightarrow a=4$，$b=2$，$c=2\sqrt{3}$

(1)中心$(-1, 2)$ (2)焦點$(h, k\pm c)=(-1, 2\pm2\sqrt{3})$

(3)正焦弦長 $=\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{2\times4}{4}=2$ (4) $\overline{PF}+\overline{PF'}=2a=8$

(5)內接矩形面積最大值 $=2ab=2\times4\times2=16$

3.橢圓短軸兩端點坐標爲$(-1，1)$，$(3，1)$，正焦弦長$\frac{8}{3}$，則橢圓方程式爲＿＿＿＿＿。

答案：$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$

解析：

短軸端點$(-1，1)$，$(3，1)$ $\Rightarrow$ 短軸在直線$y=1$上，而中心$(1，1)$

$\therefore$ 長軸在$x=1$上，又$2b=3-(-1)=4$ $\Rightarrow$ $b=2$，正焦弦長$\frac{2b^2}{a}=\frac{8}{3}$

$\Rightarrow$ $\frac{8}{a}=\frac{8}{3}$ $\Rightarrow$ $a=3$，故橢圓方程式爲$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$

4.若橢圓之兩焦點$F(-4，-4)$，$F'(0，0)$且$P(\sqrt{2}，-\sqrt{2})$爲其上一點，則橢圓之長軸長度爲＿＿＿＿＿，正焦弦長＿＿＿＿＿。

答案：8；$8\sqrt{2}$

解析：

已知橢圓二焦點$F(-4，-4)$，$F'(0，0)$ $\therefore$ $2c=\overline{FF'}=4\sqrt{2}$

故正焦弦長$4c=8\sqrt{2}$，又 $\because$ $P(\sqrt{2}，-\sqrt{2})$，則

$2a=\overline{PF}+\overline{PF'}=\sqrt{(\sqrt{2}+4)^2+(-\sqrt{2}+4)^2}+\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-\sqrt{2})^2}=8$，即長軸長度爲8

5.橢圓$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$短軸上一個端點$B$到一焦點$F$的距離是＿＿＿＿＿。

答案：4

解析：

橢圓$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$，$a^2=16$ $\Rightarrow$ $a=4$，$b^2=9$ $\Rightarrow$ $b=3$ $\Rightarrow$ $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$

$\Rightarrow$ 短軸上一個端點B到一焦點F的距離$=\sqrt{(\sqrt{7})^2+3^2}=\sqrt{16}=4$

6.已知一橢圓的兩焦點$(5，1)$，$(-1，1)$，長軸長爲$2\sqrt{13}$，則此橢圓方程式爲＿＿＿＿＿。

答案：$\frac{(x-2)^2}{13}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$

解析：

橢圓兩焦點$(5，1)$，$(-1，1)$，則中心$(2，1)$，$c=\sqrt{(5-2)^2+(1-1)^2}=3$

長軸長$2a=2\sqrt{13}$ $\Rightarrow$ $a=\sqrt{13}$ $\therefore$ $b^2=a^2-c^2=13-9=4$

$\therefore$ 橢圓方程式爲$\frac{(x-2)^2}{13}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$

7.若一橢圓的兩焦點坐標分別爲$(-2，5)$，$(-2，-3)$；且經過點$(-5，1)$，則此橢圓之方程式爲＿＿＿＿＿；其正焦弦長爲＿＿＿＿＿。

答案：$\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{25}=1$，$\frac{18}{5}$

解析：

橢圓Γ 兩焦點$F(-2，5)$，$F'(-2，-3)$

$\therefore$ 中心$(-2，1)$，$2c=\overline{FF'}=8$，其長軸垂直x軸

設Γ：$\dfrac{(x+2)^2}{b^2}+\dfrac{(y-1)^2}{a^2}=1$，$a^2=b^2+c^2=b^2+16$

Γ 過$(-5，1)$ $\Rightarrow$ $\dfrac{9}{b^2}+\dfrac{0}{a^2}=1$ $\therefore$ $b^2=9$，$a^2=25$

$\therefore$ Γ：$\dfrac{(x+2)^2}{9}+\dfrac{(y-1)^2}{25}=1$，正焦弦長$=\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{2\cdot 9}{5}=\dfrac{18}{5}$

8.設H：$\dfrac{x^2}{16-t}+\dfrac{y^2}{t+2}=1$（$t\in R$）表兩焦點在$y$軸之橢圓，則$t$值範圍為__________。

答案：$7<t<16$

解析：

所求為直橢圓 $\Rightarrow$ $\begin{cases}16-t>0\\ t+2>0\\ 16-t<t+2\end{cases}$ $\Rightarrow$ $7<t<16$

9.若橢圓Γ的方程式為$\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}+\sqrt{x^2+y^2}=2\sqrt{10}$，則$\Gamma$的短軸長 $=$__________，長軸所在的直線方程式為__________。

答案：$2\sqrt{5}$；$y=2x$

解析：

由橢圓Γ的方程式$\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}+\sqrt{x^2+y^2}=2\sqrt{10}$

可知Γ的兩焦點$(2，4)$，$(0，0)$，長軸長 $=2\sqrt{10}=2a$，兩焦點距離 $=2c=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$

所以，可得$b^2=(\sqrt{10})^2-(\sqrt{5})^2=5$，$b=\sqrt{5}$，$\Gamma$的短軸長 $=2\sqrt{5}$

長軸所在的直線就是兩焦點所在的直線，斜率 $=\dfrac{4-0}{2-0}=2$，其方程式$y=2x$

10.橢圓 $4x^2+9y^2+16x-18y-11=0$ 的中心坐標為__________，長軸長 $=$__________，短軸長 $=$__________。

答案：中心$(-2，1)$；長軸長 $=6$；短軸長 $=4$

解析：

$4x^2+9y^2+16x-18y-11=0$ $\Leftrightarrow$ $4(x+2)^2+9(y-1)^2=36$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{(x+2)^2}{9}+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$

此橢圓的中心$(-2，1)$，長軸長 $=6$，短軸長 $=4$

11.與橢圓$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$ 共焦點且過點$(3，3)$之橢圓方程式為__________。

答案：$\dfrac{x^2}{15}+\dfrac{(y-1)^2}{10}=1$

解析：

設橢圓為$\dfrac{x^2}{9+k}+\dfrac{(y-1)^2}{4+k}=1$，則將$(3，3)$代入 $\therefore$ $\dfrac{9}{9+k}+\dfrac{4}{4+k}=1$

$\Rightarrow$ $36+9k+36+4k=36+9k+4k+k^2$ $\Rightarrow$ $k^2=36$ $\Rightarrow$ $k=6$ 或 -6（不合）

故$\dfrac{x^2}{15}+\dfrac{(y-1)^2}{10}=1$

12.短軸長$2\sqrt{3}$且與橢圓$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 共焦點之橢圓方程式為__________。

答案：$\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$

解析：

與 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$ 共焦點之橢圓，設爲 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，則 $a^2-b^2=c^2=4-1=3$

短軸長 $2b=2\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ $b=\sqrt{3}$ $\therefore$ $a^2=b^2+3=6$，故所求爲 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$

13.已知一橢圓之一焦點爲$(-2，3)$，一長軸頂點爲$(7，3)$，且短軸長爲 6，則此橢圓方程式爲__________。

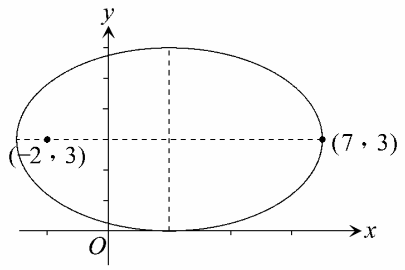
答案：$\dfrac{(x-2)^2}{25}+\dfrac{(y-3)^2}{9}=1$

解析：

$2b=6$，$b=3$，$b^2=a^2-c^2$ $\Rightarrow$ $9=(a+c)(a-c)$，若 $a-c=9$ 得 $a+c=1$（不合）

所以 $a-c=1$，$a+c=9$ $\Rightarrow$ $a=5$，$c=4$，設所求爲 $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$

$(h，k)=(7-a，3)=(7-5，3)=(2，3)$，所求：$\dfrac{(x-2)^2}{5^2}+\dfrac{(y-3)^2}{3^2}=1$



14.若橢圓 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1$，則 $4x+5y-1$ 之最大值 $=$_________，又其內接矩形之最大面積 $=$__________，又其內接正方形之最大面積 $=$__________。

答案：$4\sqrt{34}-1$；24；$\dfrac{82944}{625}$

解析：

(1)令$(x，y)=(3\cos\theta，4\sin\theta)$，$\theta\in R$

$4x+5y-1=12\cos\theta+20\sin\theta-1=\sqrt{12^2+20^2}\cos(\theta+\alpha)-1=4\sqrt{34}\cos(\theta+\alpha)-1$

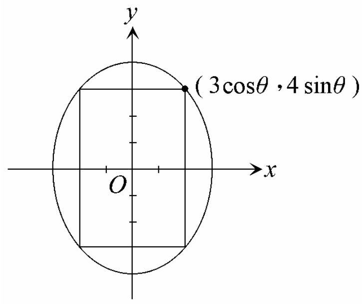
$\because$ $-1\le\cos(\theta+\alpha)\le 1$ $\therefore$ $-4\sqrt{34}-1\le 4\sqrt{34}\cos(\theta+\alpha)-1\le 4\sqrt{34}-1$

故 $-4\sqrt{34}-1\le 4x+5y-1\le 4\sqrt{34}-1$ $\therefore$ 最大值 $=4\sqrt{34}-1$

(2)設矩形在第一象限內之頂點爲$(3\cos\theta，4\sin\theta)$，則矩形之長、寬分別爲 $6\cos\theta$，$8\sin\theta$

矩形面積 $=(6\cos\theta)(8\sin\theta)=48\sin\theta\cos\theta=24\sin2\theta\le 24$ $\therefore$

最大面積 $=24$



(3)正方形邊長相等，設一頂點坐標爲$(k，k)$，$k>0$，則 $\dfrac{k^2}{9}+\dfrac{k^2}{16}=1$ $\Rightarrow$ $16k^2+9k^2=144\Rightarrow$ $25k^2=144$ $\Rightarrow$ $k^2=\dfrac{144}{25}$，

故正方形面積 $=(2\times\dfrac{144}{25})^2=\dfrac{82944}{625}$

15.設 $P(x，y)$ 爲橢圓 $3x^2+9y^2=27$ 上一點，求 x^2+y^2 的最大值__________。

答案：9

解析：

設$P(x，y) = (3\cos\theta，\sqrt{3}\sin\theta)$

則$x^2 + y^2 = (3\cos\theta)^2 + (\sqrt{3}\sin\theta)^2 = 9\cos^2\theta + 3\sin^2\theta = 3 + 6\cos^2\theta$

$\because\ -1 \le \cos\theta \le 1 \Rightarrow 0 \le \cos^2\theta \le 1$，故當$\cos^2\theta = 1$時，$x^2 + y^2$之最大值 $= 9$

16.橢圓$\dfrac{x^2}{4} + y = 1$上任一點$P(x，y)$，

(1) $x + 2y$的最大值 $=$ __________，此時$(x，y) =$ __________。

(2) P點到直線 $3x + 4y + 10 = 0$ 的最大距離 $=$ __________。

答案：(1) $2\sqrt{2}$，$(\sqrt{2}，\dfrac{\sqrt{2}}{2})$　(2) $\dfrac{2\sqrt{13}+10}{5}$

解析：

$\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$上任一點$P(x，y) = (2\cos\theta，\sin\theta)$，$0 \le \theta \le 2\pi$

(1) $x + 2y = 2\cos\theta + 2\sin\theta = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\right)$

$= 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}\cos\theta + \sin\dfrac{\pi}{4}\sin\theta\right) = 2\sqrt{2}\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$

最大值$2\sqrt{2}$，此時$\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow \theta - \dfrac{\pi}{4} = 0 \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4}$

$\therefore\ P\left(2\cos\dfrac{\pi}{4}，\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = \left(\sqrt{2}，\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(2) P到直線 $3x + 4y + 10 = 0$ 的距離$= \dfrac{|6\cos\theta + 4\sin\theta + 10|}{\sqrt{9+16}} = \dfrac{|\sqrt{52}\cos(\theta-\alpha)+10|}{5}$

最大值 $= \dfrac{\sqrt{52}+10}{5} = \dfrac{2\sqrt{13}+10}{5}$