高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：93.02.20					
範圍	1-1 拋物線	班級		姓名	
		座號			

一、單選題 (共 8 分)

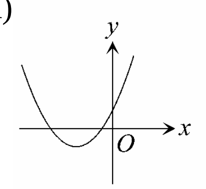
1.下列何者為拋物線$y=ax^2+bx+c$的頂點在第四象限之充分條件？

(A) $a>0$，$b>0$，$c>0$ (B) $a>0$，$b>0$，$c<0$ (C) $a>0$，$b<0$，$c<0$

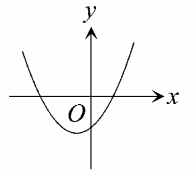
(D) $a<0$，$b<0$，$b^2-4ac<0$ (E) $a<0$，$b>0$，$b^2-4ac>0$

解析：(C)

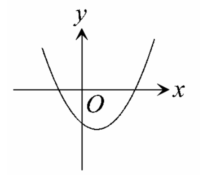
(A)



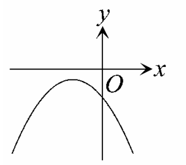
(B)



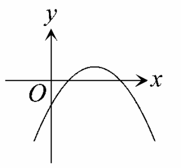
(C)



(D)

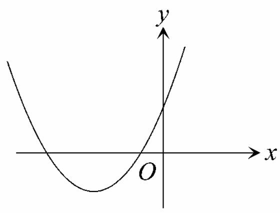


(E)



二、複選題(每題 8 分)

2.設$y=ax^2+bx+c$之圖形如下，下列何者正確？



(A) $a<0$ (B) $b>0$ (C) $c<0$ (D) $a+b+c>0$

(E) $b^2-4ac>0$

解析：(B)(D)(E)

開口朝上 ∴ $a>0$，過y軸截點之切線斜率為正

∴ $b>0$，y軸截距為正 ∴ $c>0$，令$x=1$ ∴ $y=a+b+c>0$

又與x軸交於二點 ∴ $b^2-4ac>0$

3.已知一拋物線之焦點為(1，1)，準線為 $y+3=0$，則下列何者正確？

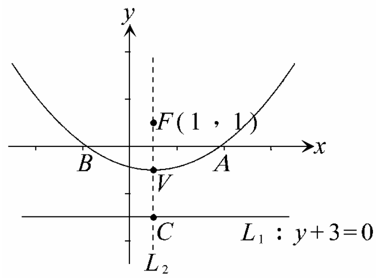
(A)其頂點為(-1，1)

(B)其焦距為 2

(C)其對稱軸為 $x=-1$

(D)若此拋物線與 x 軸交於 A，B 兩點，則 $\overline{AB}=4\sqrt{2}$

(E)過 $P(1，-1)$且與其相切之直線方程式為 $x=1$



解析：(B)(D)

已知焦點$F(1，1)$，準線L_1：$y+3=0$，則拋物線如下圖，對稱軸$L_2\perp L_1$且過$F(1，1)$，∴ 對稱軸L_2：$x-1=0$，L_1，L_2之交點$C(1，-3)$

∴ 頂點V為$\overline{CF}$ 之中點$(1，-1)$

焦距 $|c|=\overline{VF}=2$，過$V(1，-1)$且與拋物線相切之直線為$y=-1$

拋物線Γ：$(x-1)^2=8(y+1)$……①，

令$y=0$ 代入① ⇒ $(x-1)^2=8$，得$x=1\pm2\sqrt{2}$

即$A(1+2\sqrt{2}，0)$，$B(1-2\sqrt{2}，0)$ ⇒ $\overline{AB}=4\sqrt{2}$

三、填充題(每題 10 分)

1.拋物線 $\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}=\dfrac{|x+y+4|}{\sqrt{2}}$ 的對稱軸方程式爲__________，頂點坐標爲_____正焦弦長爲__________。

解析：$x-y=0$；(0，0)；$8\sqrt{2}$

拋物線 $\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}=\dfrac{|x+y+4|}{\sqrt{2}}$，焦點 $F(2，2)$，準線 $L：x+y+4=0$

設對稱軸方程式爲 $x-y+k=0$，過 $F(2，2)$ $\Rightarrow$ $2-2+k=0$ $\Rightarrow$ $k=0$

$\therefore$ 對稱軸方程式爲 $x-y=0$，又 $\begin{cases}x+y+4=0\\x-y=0\end{cases}\Rightarrow A(-2，-2)$，則頂點爲 A 與 F 中點

$\therefore$ 頂點$(\dfrac{-2+2}{2}，\dfrac{-2+2}{2})=(0，0)$，

正焦弦長 $=2\overline{AF}=2\sqrt{(-2-2)^2+(-2-2)^2}=2\times4\sqrt{2}=8\sqrt{2}$

2.設 F 爲拋物線 $(y-1)^2=12(x-1)$ 的焦點，若 $P(a，b)$ 在拋物線上，且 $\overline{PF}=9$，則 $a=$________。

解析：$a=7$

拋物線 $(y-1)^2=12(x-1)$，頂點$(1，1)$，$4c=12$，$c=3$

$\therefore$ 焦點 $F(4，1)$，$P(a，b)$ 在拋物線上且 $\overline{PF}=9$

$\Rightarrow \begin{cases}(b-1)^2=12(a-1)\\\sqrt{(a-4)^2+(b-1)^2}=9\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(b-1)^2=12(a-1) & \cdots\cdots①\\(a-4)^2+(b-1)^2=81 & \cdots\cdots②\end{cases}$

①代入② $(a-4)^2+12(a-1)=81$

$\Rightarrow$ $a^2+4a-77=0\Rightarrow(a-7)(a+11)=0$

$\Rightarrow$ $a=7$ 或 -11（代入①不合）

3.已知過(1，1)，(3，2)，(3，−1)三點的拋物線方程式爲 $x=Ay^2+By+C$，其中 $A，B，C$ 爲定數，則 $B=$__________，此拋物線的正焦弦長=__________。

解析：−1；1

$\begin{cases}1=A+B+C\cdots\cdots ①\\3=4A+2B+C\cdots\cdots ②\\3=A-B+C\cdots\cdots ③\end{cases}$ $\begin{matrix}②-① \Rightarrow 2=3A+B\\③-① \Rightarrow 2=-2B\end{matrix}$ $\Rightarrow\begin{cases}A=1\\B=-1\end{cases}$

代入①得 $C=1$

$\therefore$ 方程式 $x=y^2-y+1$ $\Rightarrow$ $x-1=y^2-y+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}$ $\Rightarrow$ $x-\dfrac{3}{4}=(y-\dfrac{1}{2})^2$

$\therefore$ $(y-\dfrac{1}{2})^2=4\times\dfrac{1}{4}(x-\dfrac{3}{4})$ $\Rightarrow$ $c=\dfrac{1}{4}$ $\therefore$ 正焦弦長 $4|c|=1$

4.拋物線 $(x-3)^2=8(y+1)$ 的頂點坐標爲__________，焦點坐標爲__________，準線方程式爲__________。

解析：頂點(3，−1)；焦點(3，1)； $y=-3$

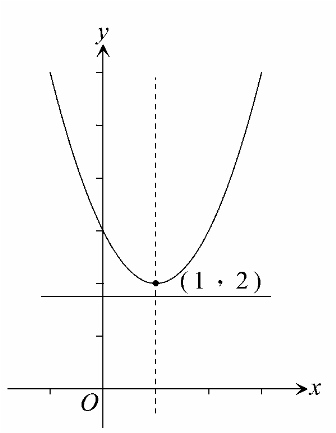
$(x-3)^2 = 4\times 2(y+1)$　$\therefore$　$c=2$，頂點$(3，-1)$

焦點$(3，-1+2)=(3，1)$，準線$y+1=-2$　$\Rightarrow$　$y=-3$

5.過$(0，3)$，$(1，2)$，$(-1，6)$三點且對稱軸垂直x軸之拋物線的

(1)方程式爲__________。　(2)準線方程式爲__________。

解析：(1)$y=x^2-2x+3$；(2)　$y=\dfrac{7}{4}$



(1)設$y=ax^2+bx+c$，$(0，3)$，$(1，2)$，$(-1，6)$三點代入

得$\begin{cases}3=c\\2=a+b+c\\6=a-b+c\end{cases}$　$\Rightarrow$　$\begin{cases}a=1\\b=-2\\c=3\end{cases}$，即$y=x^2-2x+3$

(2) $y=x^2-2x+3$　$\Rightarrow$　$(x-1)^2=(y-2)$，$4c=1$，$c=\dfrac{1}{4}$

$\therefore$　準線$y=2-\dfrac{1}{4}$　$\Rightarrow$　$y=\dfrac{7}{4}$

6.拋物線$x^2-2x+4y-5=0$的對稱軸方程式爲__________，頂點坐標爲__________，焦點坐標爲__________，準線方程式爲__________，正焦弦長 $=$ __________。

解析：

$x^2-2x+4y-5=0$　$\Rightarrow$　$(x-1)^2=-4y+6$　$\Rightarrow$　$(x-1)^2=-4(y-\dfrac{3}{2})$

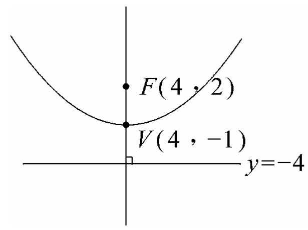
(1)軸爲$x-1=0$　　(2)頂點$(1，\dfrac{3}{2})$

(3) $4c=-4$　$\Rightarrow$　$c=-1$，焦點$(1，\dfrac{3}{2}-1)=(1，\dfrac{1}{2})$

(4)準線$y=\dfrac{3}{2}-(-1)$　$\Rightarrow$　$y=\dfrac{5}{2}$　(5)正焦弦長 $=|-4|=4$

7.一拋物線的頂點$(4，-1)$，焦點$(4，2)$，則拋物線之準線方程式爲__________，正焦弦長 $=$ __________，拋物線方程式爲__________。

解析：12；$(x-4)^2=12(y+1)$



頂點$V(4，-1)$，焦點$F(4，2)$，$c=\overline{VF}=3$，準線$y=-1-3$

$\Rightarrow$　$y=-4$，正焦弦長 $=4|c|=12$，軸爲$x-4=0$

$\therefore$　拋物線方程式爲$(x-4)^2=12(y+1)$

8.拋物線$y^2=-8x$的焦點坐標爲__________，準線方程式爲__________。

解析：

$y^2=-8x$，$4c=-8\Rightarrow c=-2$，焦點$(c，0)=(-2，0)$，準線$x+c=0\Rightarrow x-2=0$

9.求拋物線$y^2=6x$的頂點坐標__________，焦點坐標__________，準線方程式__________，正焦弦長__________。

解析：

拋物線$y^2=6x$的頂點(0，0)，軸$y=0$，$4c=6 \quad \Rightarrow \quad c=\dfrac{3}{2}$

$\because$　拋物線開口向上，焦點在頂點(0，0)的上方，所以焦點坐標爲(0，$\dfrac{3}{2}$)，

準線方程式爲$y=-\dfrac{3}{2}$且正焦弦長 $=4c=6$

10.求拋物線Γ：$y^2=16x$的焦點到準線距離__________。

解析：

拋物線Γ：$y^2=16x \quad \because \quad 4c=16 \quad \therefore \quad c=4$，故焦點到準線的距離 $=2c=8$

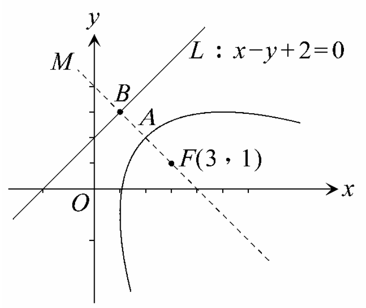
11.準線是直線$x=-5$，焦點在$F(3，0)$的拋物線方程式爲__________。

解析：

準線$x=-5$，焦點$F(3，0)$，則對稱軸$y=0$，頂點$(\dfrac{-5+3}{2}，0)=(-1，0)$，$c=4$，

開口向右　$\therefore$　拋物線方程式爲$y^2=16(x+1)$

12.方程式$\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}=\dfrac{|x-y+2|}{\sqrt{2}}$所表示之圖形爲拋物線，其頂點爲__________，對稱軸的方程式爲__________。



解析：

$\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}$ 表動點(x,y)與定點$(3,1)$的距離$\dfrac{|x-y+2|}{\sqrt{2}}$

表動點(x,y)與定直線 $x-y+2=0$ 的距離，由拋物線定義知，

焦點 $F(3，1)$，準線 L：$x-y+2=0$

設軸方程式 M 爲 $x+y+k=0$，將 $F(3，1)$代入　$\Rightarrow \quad k=-4$

$\therefore$　M：$x+y-4=0$，B 點坐標爲$\begin{cases} x-y+2=0 \\ x+y-4=0 \end{cases}$之解　$\Rightarrow \quad B(1，3)$

$\therefore$　頂點 A 坐標爲 $\overline{BF}$ 之中點　$\Rightarrow \quad A(2，2)$

13.以$y^2=16x$之正焦弦爲直徑的圓之方程式爲__________。

解析：

$y^2=16x$的焦點$F(4，0)$，令$x=4$ 代入$y^2=16x$，得$y^2=64 \quad \therefore \quad y=\pm 8$

$\therefore$　正焦弦兩端點爲$A(4，8)$，$B(4，-8)$，以$\overline{AB}$ 爲直徑之圓即以$F(4，0)$爲圓心，

半徑$\dfrac{1}{2}\overline{AB}=8$ 之圓其方程式爲$(x-4)^2+y^2=64$

14.焦點爲$(1，-1)$，準線垂直於y軸，正焦弦長爲 8 之拋物線方程式爲__________。

解析：

正焦弦長 $=4|c|=8 \quad \Rightarrow \quad c=\pm 2$

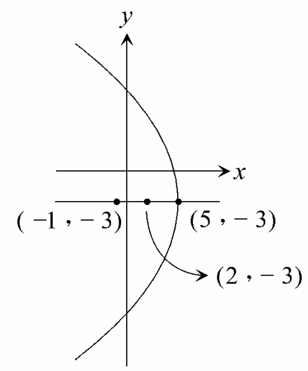
$\therefore\quad c=-2$ 時，頂點$V(1，1)$，$c=2$ 時，頂點$V(1，-3)$
$\therefore\quad (x-1)^2=-8(y-1)$或$(x-1)^2=8(y+3)$即爲所求

15.與$y^2-4x+6y+5=0$ 共軸、共焦點且過(3，1)之抛物線方程式爲＿＿＿＿＿。
解析：
$y^2-4x+6y+5=0\quad\Rightarrow\quad(y+3)^2=4(x+1)$，$\therefore$ 頂點爲$(-1，-3)$，$c=1$
$\Rightarrow$ 焦點爲$(0，-3)$且對稱軸爲$y+3=0$
設Γ：$(y+3)^2=4k(x+k)$，將(3，1)代入，$\therefore\quad 16=4k(3+k)\quad\Rightarrow\quad k^2+3k-4=0$
$\Rightarrow\quad k=1$ 或 -4，故$(y+3)^2=-16(x-4)$或$(y+3)^2=4(x+1)$

16.與直線 $2x+3y+2=0$ 及點$(1，-1)$等距離的點的軌跡方程式爲＿＿＿＿＿。
解析：
$$\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}=\frac{|2x+3y+2|}{\sqrt{13}}$$
$\Rightarrow\quad 13(x-1)^2+13(y+1)^2=(2x+3y+2)^2\Rightarrow\quad 9x^2-12xy+4y^2-34x+14y+22=0$

17.設抛物線Γ 的焦點爲$F(1，1)$，準線爲L：$x+y+2=0$，則Γ 的方程式爲＿＿＿＿＿。
解析：
焦點$F(1，1)$，準線L：$x+y+2=0$ 的抛物線上的點$P(x，y)$
則$\overline{PF}=d(P，L)$，即$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=\dfrac{|x+y+2|}{\sqrt{2}}$
亦即 $2(x^2-2x+1+y^2-2y+1)=x^2+y^2+4+2xy+4x+4y$，可得$x^2-2xy+y^2-8x-8y=0$

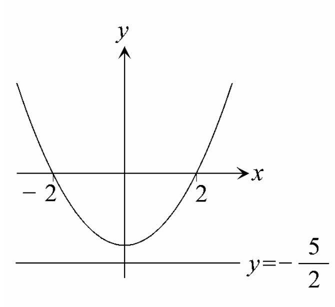
18.已知$A(5，-3)$，$B(-1，-3)$爲平面上兩點，則以A爲頂點，B爲焦點的抛物線方程式爲＿
，而以$\overline{AB}$ 爲正焦弦，開口朝下的抛物線方程式爲＿＿＿＿＿。



解析：
(1)抛物線Γ 以$A(5，-3)$爲頂點，$B(-1，-3)$爲焦點如右圖，
則$c=-6$，Γ 的方程式爲
$(y+3)^2=4(-6)(x-5)$， 即$(y+3)^2=-24(x-5)$
(2)以$\overline{AB}$ 爲正焦弦的抛物線，焦點爲 $\overline{AB}$ 的中點$(2，-3)$，且
開口朝下，此時$c=\dfrac{-3}{2}$ ，頂點$(2，-3+\dfrac{3}{2})=(2，\dfrac{-3}{2})$
因此，此抛物線方程式爲$(x-2)^2=4(\dfrac{-3}{2})(y+\dfrac{3}{2})$，
即$(x-2)^2=-6(y+\dfrac{3}{2})$

19.若兩抛物線$y=2x^2+(2a-4)x+b$與$y=3x^2+6x-9$ 的頂點重合，則
數對$(a，b)=$＿＿＿＿＿，它們的對稱軸方程式爲＿＿＿＿＿。
解析：

$y = 2x^2 + (2a-4)x + b = 2(x+\frac{a-2}{2})^2 + b - \frac{(a-2)^2}{2}$，$y = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x+1)^2 - 12$



兩拋物線的頂點分別爲$(\frac{-(a-2)}{2}$，$b - \frac{(a-2)^2}{2})$與$(-1$，$-12)$

當兩頂點重合時，$\begin{cases} \frac{-(a-2)}{2} = -1 \\ b - \frac{(a-2)^2}{2} = -12 \end{cases}$，即$a = 4$，$b = -12 + 2 = -10$

兩拋物線的對稱軸也重合，其方程式爲$x = -1$

所以，$(a$，$b) = (4$，$-10)$，對稱軸方程式爲$x = -1$

20.拋物線$y = \frac{1}{2}x^2 - 2$的焦點坐標爲__________，此拋物線與x軸有兩個交點，這兩點的距離 =__________。

解析：

$y = \frac{1}{2}x^2 - 2 \Rightarrow x^2 = 2(y+2)$，此方程式的圖形爲一拋物線，所以$(0$，$-2)$爲頂點，

焦點坐標$(0$，$-2+\frac{1}{2}) = (0$，$\frac{-3}{2})$，

當$y = 0$時，$x^2 = 2 \times 2$，即$x = \pm 2$，此拋物線與x軸的交點爲$(2$，$0)$，$(-2$，$0)$，其距離 $= 4$

21.拋物線方程式$x^2 - 4x - 12y - 8 = 0$，求其焦點爲__________。

解析：

拋物線$x^2 - 4x - 12y - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-2)^2 = 12y + 8 + 4 \quad \Rightarrow \quad (x-2)^2 = 12(y+1)$

頂點$(2$，$-1)$，$4|c| = 12 \quad \Rightarrow \quad c = 3$，對稱軸：$x - 2 = 0$， 焦點爲$(2$，$-1+3) = (2$，$2)$

22.設$A(1$，$-4)$，$B(5$，$2)$，點C在曲線$y = x^2$上，欲使$\triangle ABC$的面積最小，則C點坐標爲_____。

解析：

點C在$y = x^2$上，設$C(a$，$a^2)$，又$A(1$，$-4)$，$B(5$，$2)$

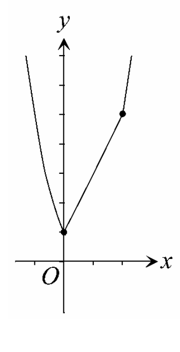
則$\triangle ABC$的面積$= \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 1 & 5 & a & 1 \\ -4 & 2 & a^2 & -4 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|2 + 20 + 5a^2 - 2a - 4a - a^2|$

$= \frac{1}{2}|4a^2 - 6a + 22| = |2(a-\frac{3}{4})^2 + \frac{79}{8}|$

$\therefore$ 當$a = \frac{3}{4}$時，面積最小值爲$\frac{79}{8}$，此時$C(\frac{3}{4}$，$\frac{9}{16})$

23.設函數$f(x) = |x(x-2)| + x^2 + 1$，試求$f(x)$之最小值__________。

解析：

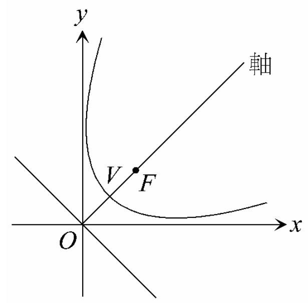


$$f(x)=|x(x-2)|+x^2+1=\begin{cases}2x^2-2x+1，x<0\text{或}x>2\\2x+1，0\le x\le 2\end{cases}$$

圖示如右　∴　$f(x)$最小值爲$f(0)=1$

24.抛物線Γ 的頂點(1，1)，準線$x+y=0$，則Γ 的焦點坐標爲__________，軸的方程式爲__，Γ 的方程式爲__________。

解析：



(1)過頂點$V(1，1)$垂直準線$x+y=0$的直線，$x-y=0$爲軸，軸與準線交點$O(0，0)$，設焦點F，則V爲$\overline{OF}$中點

∴　$\overrightarrow{OF}=2\overrightarrow{OV}=(2，2)$，　故焦點$F(2，2)$

(2)設Γ 上任一點$P(x，y)$，由$\overline{PF}=d(P，L)$，L表準線，

得$\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}=\dfrac{|x+y|}{\sqrt{2}}$，化簡之，得$\Gamma$ 的方程式爲

$x^2-2xy+y^2-8x-8y+16=0$

25.抛物線$y=x^2-mx+m$與x軸交於A，B兩點，若$\overline{AB}=\sqrt{5}$，則$m=$______。

解析：

$y=x^2-mx+m$交x軸於$A(\alpha，0)$，$B(\beta，0)$，則$\alpha+\beta=m$，$\alpha\beta=m$

$\Rightarrow$　$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=m^2-4m$　∵　$\overline{AB}=|\alpha-\beta|=\sqrt{5}$

∴　$m^2-4m=5$　$\Rightarrow$　$(m+1)(m-5)=0$　$\Rightarrow$　$m=-1$ 或 5

26.若方程式$(x^2+y^2+2x-1)+k(x^2+2y^2-1)=0$表一抛物線，則$k=$______。

解析：

$(x^2+y^2+2x-1)+k(x^2+2y^2-1)=0\Rightarrow(1+k)x^2+(1+2k)y^2+2x-(1+k)=0$之圖形爲抛物線，則必$y^2$之係數$1+2k\ne0$，而$x^2$之係數$1+k=0$，$k=-1$

27.抛物線$y^2=4x$關於直線$x-y+1=0$對稱的圖形Γ。

(1) Γ 的方程式爲________。(2) Γ 的焦點坐標爲________。(3) Γ 的準線方程式爲______。

解析：

點$(x，y)$對直線$x-y+1=0$之對稱點爲$(y-1，x+1)$代入$y^2=4x$

得$(x+1)^2=4(y-1)\cdots\cdots(\Gamma)$，$\Gamma$ 之頂點$(-1，1)$，焦距$c=1$

∴　焦點坐標爲$(-1，2)$，準線$y=1-1$　$\Rightarrow$　$y=0$

28.二抛物線$y=x^2-3x$與 $y=\dfrac{1}{2}x^2+ax+b$有相同的頂點，則$a=$________，$b=$__________。

解析：

$y=x^2-3x=(x-\dfrac{3}{2})^2-\dfrac{9}{4}$　$\Rightarrow$　$(x-\dfrac{3}{2})^2=y+\dfrac{9}{4}$，頂點$(\dfrac{3}{2}，-\dfrac{9}{4})$

$y=\dfrac{1}{2}x^2+ax+b=\dfrac{1}{2}(x+a)^2+b-\dfrac{a^2}{2}$，頂點$(-a，b-\dfrac{a^2}{2})$，

已知二頂點為同一點， $(-a, b-\frac{a^2}{2})=(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4})$

$\therefore \quad -a=\frac{3}{2}, b-\frac{a^2}{2}=-\frac{9}{4} \quad \Rightarrow \quad a=-\frac{3}{2}, b=-\frac{9}{8}$