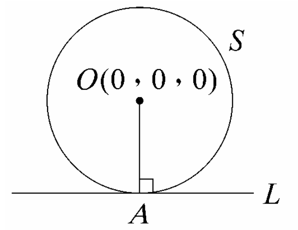
高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：93.02.08					
範圍	4-4 球面與平面 +ANS	班級		姓名	
		座號			

一、單選題 (共 8 分)

1. 設直線 L：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{1}$ 與球面 S：$x^2+y^2+z^2=k$ 相切，則常數 k 之值為

(A) 6 (B) 7 (C) 35 (D) $\dfrac{35}{6}$ (E) $\dfrac{35}{36}$。



Ans： (D)

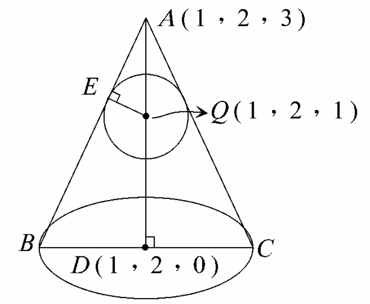
解析：

設切點為 $A(t+1，2t-1，t+2)\in L$

$\because$ 相切 $\therefore$ $\overrightarrow{OA}\perp L\Rightarrow$ $(t+1，2t-1，t+2)\cdot(1，2，1)=0$

$\Rightarrow$ $t=-\dfrac{1}{6}$ $\Rightarrow$ $A(\dfrac{5}{6}，-\dfrac{4}{3}，\dfrac{11}{6})$，半徑 $\sqrt{k}=\overline{OA}$ $\Rightarrow$ $k=\overline{OA}^2=\dfrac{35}{6}$

2. 光源放在點 $A(1，2，3)$，向球面 S：$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=1$ 照射，則在 xy 平面上的射影區域面積為(A) 3π (B) 4π (C) 5π (D) 6π (E) 9π。



Ans： (A)

解析：

如下圖，其射影為一個圓區域，中心為 $D(1，2，0)$，$\overline{BC}$ 為直徑

$\because$ $\overline{AD}=3$，$\overline{AQ}=2$，$\overline{QE}=1$，$\overline{AE}=\sqrt{3}$，

而$\triangle AEQ\sim\triangle ADB$ $\therefore$ $\overline{BD}:\overline{QE}=\overline{AD}:\overline{AE}$

$\Rightarrow$ $\overline{BD}:1=3:\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ $\overline{BD}=\sqrt{3}$

$\therefore$ 所求面積 $=\pi(\sqrt{3})^2=3\pi$

3. 下列那一個平面與球面 S：$x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-19=0$ 相交所成的圓面積最大？

(A) $x+y+z=0$ (B) $x-2y=0$ (C) $z+1=0$ (D) $2x-y-2z=5$ (E) $3x+4y-1=0$。

Ans： (C)

解析：

S：$(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=25$，球心為 $Q(1，-2，-1)$，半徑 $r=5$

(A) Q 到 $x+y+z=0$ 之距離 $=\dfrac{|1-2-1|}{\sqrt{3}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}<r$

(B) Q 到 $x-2y=0$ 之距離 $=\dfrac{|1+4|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}<r$

(C) Q 到 $z+1=0$ 之距離 $=0$

(D) Q 到 $2x-y-2z-5=0$ 之距離 $=\dfrac{1}{3}<r$

(E) Q 到 $3x+4y-1=0$ 之距離 $=\dfrac{6}{5}<r$

$\therefore$ $z+1=0$ 與球面 S 截出「大圓」，其面積 25π 為最大

4. 設點 P 在球面 S：$x^2+y^2+z^2=9$ 上移動，點 Q 在平面 E：$2x-y-2z=15$ 上移動，則 $\overline{PQ}$ 的最大值爲(A) 2　(B) 5　(C) 8　(D) 13　(E)不存在。

Ans：(E)

解析：

(1) $\overline{PQ}$ 有最小值 $=$ (球心 O 到 E 的距離) $-$ 半徑 $=5-3=2$。

(2) P 到平面的距離有最大值 $=$ (球心 O 到 E 的距離) $+$ 半徑 $=5+3=8$

二、 填充題 (共 10 分)

1. 球面 S 過點 $A(-1，2，1)$，又與平面 E：$x+2y+z=7$ 相切於點 $B(1，3，0)$，則球面 S 的方程式爲＿＿＿＿＿。

Ans：$x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=6$

解析：

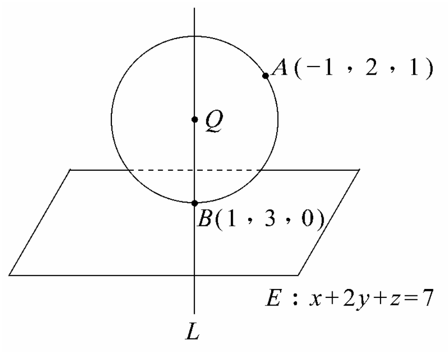
過 B 而垂直平面 E 的直線 L：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z}{1}$，

令球心 $Q(t+1，2t+3，t)$　$\because$　$\overline{QA}=\overline{QB}$

$\therefore$　$(t+2)^2+(2t+1)^2+(t-1)^2=t^2+(2t)^2+t^2$

$\therefore$　$t=-1$，$\therefore$　球心 $Q(0，1，-1)$，半徑爲 $\sqrt{6}$，

$\therefore$　S：$x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=6$



2. 兩球面 S_1：$x^2+y^2+z^2=16$ 與 S_2：$x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z-4=0$ 相交成一圓 C，則圓 C 所在的平面 E 方程式爲＿＿＿＿＿。

Ans：$x-y+z=6$

解析：

由$(x^2+y^2+z^2-16)-(x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z-4)=0$

$\Rightarrow$　$2x-2y+2z-12=0$　$\Rightarrow$　$x-y+z=6$

3. 球面 S：$x^2+y^2+z^2+2x-4y-4=0$，一點 $P(1，0，1)$，過 P 點與 S 相切的平面方程式爲＿＿＿＿＿。

Ans：$2x-2y+z-3=0$

解析：

$1^2+0^2+1^2+2\times 1-0-4=0$　$\Rightarrow$　P 點在球面上，

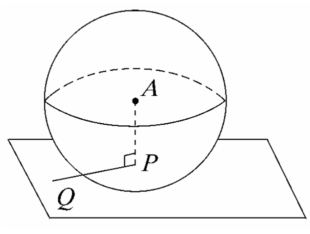
S：$(x+1)^2+(y-2)^2+z^2=3^2$，球心 $A(-1，2，0)$，$\overrightarrow{AP}=(2，-2，1)$。

設 $Q(x，y，z)$爲切平面上任一點，則 $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{PQ}$

$\Rightarrow$　$(2，-2，1)\cdot(x-1，y，z-1)=0$

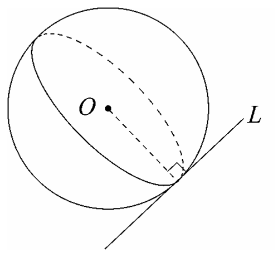
$\Rightarrow$　$2(x-1)-2y+(z-1)=0$

$\Rightarrow$　$2x-2y+z-3=0$ 爲所求



4. 通過兩點(1，2，3)與(0，0，k)的直線與球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 相切，則 k 的值爲＿＿＿＿＿。

Ans：$\dfrac{-3\pm\sqrt{65}}{4}$



解析：

(1)通過兩點(1，2，3)，(0，0，k)的直線 L 的參數式為

$(x，y，z)=(0，0，k)+t(1，2，3-k)=(t，2t，(3-k)t+k)$

(2)直線 L 與球面 S：$x^2+y^2+z^2=1$ 相切，

設切點$(\ell，2\ell，(3-k)\ell+k)$，則 $\ell+(2\ell)^2+[(3-k)\ \ell+k]^2=1$

$\Rightarrow\ \ [5+(3-k)^2]\ell^2+2k(3-k)\ell+(k^2-1)=0$ 有重根，

判別式 $D=0\ \ \Rightarrow\ \ k^2(3-k)^2-[5+(3-k)^2](k^2-1)=0$

$\Rightarrow\ \ x^2+3k-7=0\ \ \Rightarrow\ \ k=\dfrac{-3\pm\sqrt{65}}{4}$

5. 若$(x，y，z)$為球面 S：$x^2+y^2+z^2-2x-4y-2z-3=0$ 上任一點，則 $2x+y-z-3$ 的最大值為__________。

Ans：$3\sqrt{6}$

解析：

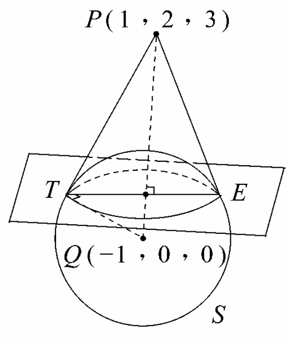
令 $2x+y-z-3=k$ 表平面 E，

E 與球面 S：$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=32$ 相交$\Rightarrow\dfrac{|2+2-1-3-k|}{\sqrt{4+1+1}}\leq 3\ \ \Rightarrow\ \ |k|\leq 3\sqrt{6}$

$\Rightarrow\ \ -3\sqrt{6}\ \leq k\leq 3\sqrt{6}\ \ \ \therefore\ \ k$ 的最大值為 $3\sqrt{6}$

6. 點 $P(1，2，3)$到球面 S：$(x+1)^2+y^2+z^2=10$ 的切線段長為__________，所有切點形成一個圓，此圓所在平面方程式為__________，圓的圓心坐標為__________。

Ans：(1) $\sqrt{7}$　(2) $2x+2y+3z=8$　(3) $(\dfrac{3}{17}，\dfrac{20}{17}，\dfrac{30}{17})$



解析：

S：$(x+1)^2+y^2+z^2=10$ 的球心 $Q(-1，0，0)$，

過 $P(1，2，3)$作球的切線，一切點 T

(1)切線段長 $\overline{PT}=\sqrt{\overline{PQ}^2-r^2}=\sqrt{(4+4+9)-10}=\sqrt{7}$

(2)所有切點所成的圓即以 P 為中心，$\overline{PT}$ 為半徑的球面 S'與球面 S 的交圓，此圓所在平面 E 即為兩球的根平面，

S'的方程式為 $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=7$，平面 E 的方程式為

$[(x+1)^2+y^2+z^2-10]-[(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2-7]=0$，即 $2x+2y+3z=8$

(3)兩球面交圓的圓心為球心連線 PQ 與平面 E 的交點，直線 PQ 的方程式：$\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$，

設圓心 $R(-1+2t，2t，3t)$代入 E：$2x+2y+3z=8$ 得

$2(-1+2t)+2(2t)+3(3t)=8\ \ \Rightarrow\ \ t=\dfrac{10}{17}$，故 $R(\dfrac{3}{17}，\dfrac{20}{17}，\dfrac{30}{17})$

7. 若直線 L：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{2}$ 與球面 S：$x^2+y^2+z^2=r^2$ 相切，則半徑 r 的長 = __________，切點坐標為__________。

Ans： $\sqrt{5}$，$(\frac{2}{3}，-\frac{5}{3}，\frac{4}{3})$

解析：

直線 L：$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{2}$ 與球面 S：$x^2+y^2+z^2=r^2$ 相切，即球心 $O(0，0，0)$到的距離等於球的半徑 r。

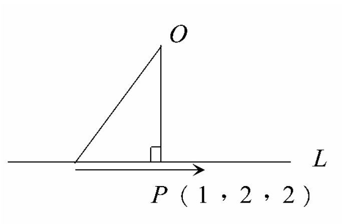
設 L 上一點 $P(1+t，-1+2t，2+2t)$且 $\overline{OP}\perp L$，則

$\overrightarrow{OP}\cdot(1，2，2)=0\Rightarrow\ (1+t，-1+2t，2+2t)\cdot(1，2，2)=0$

$\Rightarrow\ 1+t+2(-1+2t)+2(2+2t)=0\Rightarrow\ 9t+3=0$

$\Rightarrow\ t=\frac{-3}{9}=\frac{-1}{3}$。

$r=\overline{OP}=\sqrt{(1-\frac{1}{3})^2+(-1-\frac{2}{3})^2+(2-\frac{2}{3})^2}=\sqrt{5}$，



切點即為 P 點，其坐標為$(\frac{2}{3}，-\frac{5}{3}，\frac{4}{3})$

8. 球面 S：$x^2+y^2+z^2+2x+4y+4=0$ 上任一點 P 到平面 E：$2x-y+2z=6$ 的最大距離 $=$ ＿＿＿＿＿，最小距離 $=$ ＿＿＿＿＿。

Ans： (1) 3

(2) 1

解析：

S：$(x+1)^2+(y+2)^2+z^2=1$，球心 $A(-1，-2，0)$，半徑 $r=1$。

A 到平面 E：$2x-y+2z=6$ 的距離 $d(A，E)=\frac{|-2+2+0-6|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{6}{3}=2$，

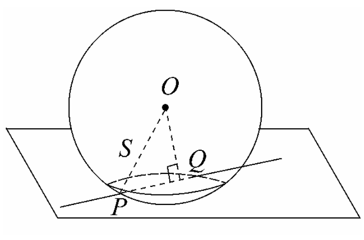
則 S 上任一點 P 到 E 的距離最大值 $=d(A，E)+r=2+1=3$，

最小值 $=d(A，E)-r=2-1=1$

9. 設平面 $x+y+z=1$ 與球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 相交部分為圓 S。已知平面 $2x+2y+z=1$ 與圓 S 交於 P，Q 兩點，則 $\overline{PQ}$ 之長為＿＿＿＿＿。

Ans： $2\sqrt{3}$

解析：



依題意，即二平面 $x+y+z=1$ 與 $2x+2y+z=1$ 的交線與球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 的交點為 P，Q

設兩平面的交線 L：$\begin{cases}x+y+z=1\cdots\cdots① \\ 2x+2y+z=1\cdots\cdots②\end{cases}$

$② - ①\ \Rightarrow\ x+y=0\ \Rightarrow\ x=-y$

$① \times 2 - ②\ \Rightarrow\ z=1$，$\therefore$ L 之參數式為$\begin{cases}x=t \\ y=-t \\ z=1\end{cases}$（$t\in R$）

對 L 上任一點 $R(t，-t，1)$，球心 O，$\overline{OR}^2=t^2+t^2+1=2t^2+1$，最小值 1

∴　$\overline{OR}$ 之最小值 1（即球心到直線 L 的距離），

球之半徑 $r=\overline{OP}=2$　，∴　$\overline{PQ}=2\sqrt{2^2-1^2}=2\sqrt{3}$

10. 已知一球面 S：$x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z-3=0$

(1)球心坐標爲__________。(2)若平面 $x+y+z+k=0$ 與 S 相切，則實數 k 之值 ＝ ______。

Ans：(1)(1，－2，1)　　(2)$\pm 3\sqrt{3}$

解析：

(1)球心 $P(1，-2，1)$，半徑 3

(2)平面 E：$x+y+z+k=0$ 與球面 S 相切⇒　球心 P 到 E 的距離 $=S$ 的半徑

$$\Rightarrow \quad \frac{|1-2+1+k|}{\sqrt{1+1+1}}=3 \quad \Rightarrow \quad k=\pm 3\sqrt{3}$$

11. 若 $x^2+y^2+z^2-2x+4y-4z-55=0$，則

(1) $x+2y+2z$ 的最大值爲__________。(2)$(x-3)^2+(y+1)^2+(z-4)^2$ 之最小值爲______。

Ans：(1) 25　　(2) 25

解析：

$x^2+y^2+z^2-2x+4y-4z-55=0 \Rightarrow \quad (x-1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=64$，

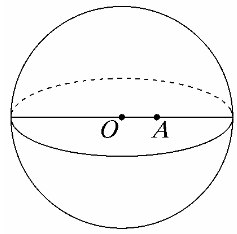
球心 $O(1，-2，2)$，半徑 $r=8$

(1)切用<u>柯西</u>不等式得

$(1^2+2^2+2^2)[(x-1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2] \geq [(x-1)+2(y+2)+2(z-2)]^2$

$\Rightarrow \quad 9\times 64 \geq (x+2y+2z-1)^2 \quad \Rightarrow \quad -24 \leq x+2y+2z-1 \leq 24$

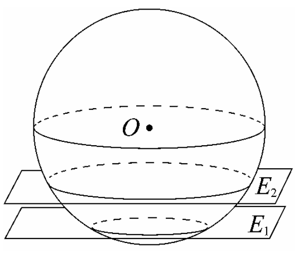
$\Rightarrow \quad -23 \leq x+2y+2z \leq 25$　∴　$x+2y+2z$ 的最大值爲 25



(2)設 $A(3，-1，4)$，則 $\overline{OA}=\sqrt{(3-1)^2+(-1+2)^2+(4-2)^2}=3$

∴　$(x-3)^2+(y+1)^2+(z-4)^2$ 的最小值$=(r-\overline{OA})^2=(8-3)^2=25$

12. 如下圖，在球面 S 中，球心 O 的同一側有距離爲 9 的兩平行截面(E_1，E_2 距離爲 9)，所截圓的面積各爲 49π，400π，求 S 半徑 ＝ __________。

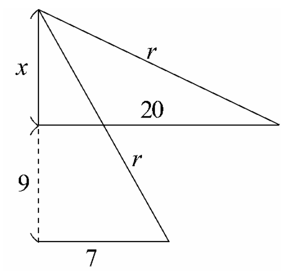


Ans：25

解析：

$$\begin{cases} x^2+400=r^2 & \cdots\cdots ① \\ (x+9)^2+49=r^2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

② － ①得 $x=15$ 代入①得 $r=25$



13. 球面 S：$x^2+y^2+z^2-2x-6y-4z-11=0$ 與平面 E：$2x+2y-z+3=0$ 交於一圓，則

(1)此交圓的圓心爲__________。(2)交圓的面積爲__________。

Ans：(1)(－1，1，3)　(2) 16π

解析：

(1)球面 S：$x^2+y^2+z^2-2x-6y-4z-11=0$

$\Rightarrow \quad (x-1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=25$，球心 $O(1，3，2)$，半徑 $r_1=5$。

設交圓圓心為$A(x，y，z)$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{OA} \,/\!/\, (2，2，-1)$

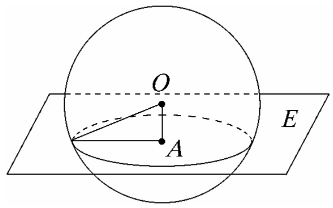
$\Rightarrow$ $(x-1，y-3，z-2)=t(2，2，-1)$

$\Rightarrow$ $(x，y，z)=(2t+1，2t+3，-t+2)$在平面

$E：2x+2y-z+3=0$ 上， $2(2t+1)+2(2t+3)-(-t+2)+3=0$

$\therefore$ $t=-1$ $\therefore$ $(x，y，z)=(-1，1，3)$

(2) $r_2^{\,2}=r_1^{\,2}-\overline{OA}^2=5^2-[(1+1)^2+(3-1)^2+(2-3)^2]=16$，$\therefore$ 交圓面積 $=16\pi$



14. 給定球面$S：x^2+y^2+z^2-4x+6y=0$，

(1)試求過點$(5，-3，2)$且與S相切的平面方程式為__________。

(2)若直線$L：\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{2}$與球面$S$相交於$A$，$B$兩點，求線段$\overline{AB}$長 $=$ __________。

Ans： (1) $3x+2z=19$ (2) $\sqrt{14}$

解析：

$S：(x-2)^2+(y+3)^2+z^2=13\Rightarrow$ 圓心$O(2，-3，0)$，半徑$\sqrt{13}$

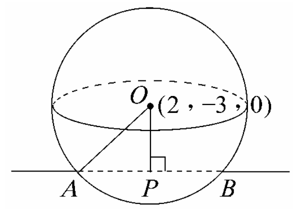
(1) $Q(5，-3，2)$代入S方程式得$(5-2)^2+(-3+3)^2+2^2=13$

$\therefore$ Q在S上 $\Rightarrow$ 平面E切S於$Q(5，-3，2)$。$\overrightarrow{OQ}=(3，0，2)$ $\therefore$ $E：3x+2z=19$

(2)設L上一點$P(2+3t，t，2+2t)$，

$\overline{OP}^2=(3t)^2+(t+3)^2+(2+2t)^2=14t^2+14t+13=14(t+\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{19}{2}$

$\therefore$ $\overline{OP}$最小值 $=d(O，L)=\sqrt{\dfrac{19}{2}}$，$\overline{AB}=2\sqrt{13-\dfrac{19}{2}}=2\cdot\dfrac{\sqrt{14}}{2}=\sqrt{14}$



15. 求過點$A(3，5，3)$且與球面$S：x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z=35$相切的平面方程式________。

Ans： $2x+3y+6z-39=0$

解析：

球面$S：x^2+y^2+z^2-2x-4y+6z=35\Rightarrow$ $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=49$，

球心$O(1，2，-3)$，半徑 $=7$，將$A(3，5，3)$代入S得$9+25+9-6-20+18=35$，

故A在球面S上，即A為切點，$\overrightarrow{OA}=(2，3，6)$，平面方程式可設為$2x+3y+6z+k=0$，

又過$(3，5，3)\Rightarrow$ $2\times3+3\times5+6\times3+k=0$ $\therefore$ $k=-39$

$\therefore$ 平面方程式為$2x+3y+6z-39=0$

16. 二球面S_1，S_2相交於一圓C，其中$S_1：x^2+y^2+z^2-4x-4y-2z+1=0$，

$S_2：x^2+y^2+z^2-3x-2y-4z+6=0$，則圓$C$之圓心為__________。

Ans： $O(1，0，3)$

解析：

此二球之根平面$E：S_2-S_1=0$ $\Rightarrow$ $E：x+2y-2z+5=0$，

圓C之圓心O為球心$O_1(2，2，1)$在E上之投影

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2-1\cdot\dfrac{9}{9}=1 \\ y = 2-2\cdot 1 = 0 \\ z = 1+2\cdot 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow \quad O(1，0，3)$$

17. 求空間中一點$(-4，4，4)$到球面 $x^2+y^2+z^2-4x-2y+4z=0$ 上任一點 Q 的最長距離 $=$ ＿＿＿＿＿；此時之 Q 點坐標為＿＿＿＿＿。

Ans： (1) 12　　(2)$(4，0，-4)$

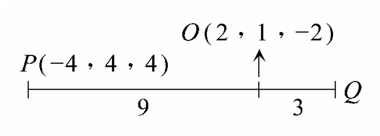
解析：

球面方程式：$(x-2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9\Rightarrow$　球心 $O(2，1，-2)$，半徑 3

$P(-4，4，4)$代入得$(-4-2)^2+(4-1)^2+(4+2)^2=81>9$

$\therefore$　P 在球外，$\overline{OP}=9$　$\therefore$　$\overline{PQ}=\overline{PO}+\overline{OQ}=9+3=12$。

$\overline{QP}：\overline{QO}=12：3$，由分點公式得 $Q=\dfrac{12}{12-3}(2，1，-2)+\dfrac{-3}{12-3}(-4，4，4)=(4，0，-4)$



18. 假設一地球儀的半徑為 R，在北緯 30°的緯圈上，由東經 30°的位置沿逆時鐘方向東移到東經 60°的位置，其所經的弧長為＿＿＿＿＿。

Ans： $\dfrac{\sqrt{3}}{12}\pi R$

解析：

設球心 O，北緯 30°的小圓圓心 O'，半徑 r。在北緯 30°的緯圈上，東經 30°的位置為 A，東經 60°的位置為 B

$\therefore$　$\angle AO'B=30°$，$r=R\cos 30°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}R$

$\therefore$　$\overset{\frown}{AB}=r\cdot\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}R\times\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{12}\pi R$