高雄市明誠中學 高二數學平時測驗					日期：93.02.01
範圍	4-3 球面+ANS	班級		姓名	
		座號			

一、單選題 (共 8 分)

1. 空間中，滿足$(x^2+y^2+z^2-1)(x^2+y^2+z^2-2)(x^2+y^2+z^2-3)\le 0$的圖形之體積為
   (A)$\frac{80}{3}\pi$ (B)$\frac{40}{3}\pi$ (C)$\frac{20}{3}\pi$ (D)$\frac{1}{3}(3\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1)\pi$ (E)$\frac{4}{3}(3\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1)\pi$ 。
   提示：球面半徑為 r，則其體積為$\frac{4}{3}\pi r^3$

Ans： (E)

解析：

$\because$ $(k-1)(k-2)(k-3)\le 0$ $\Leftrightarrow$ $k\le 1$ 或 $2\le k\le 3$

$\therefore$ $(x^2+y^2+z^2-1)(x^2+y^2+z^2-2)(x^2+y^2+z^2-3)\le 3$

$\Rightarrow$ $0\le x^2+y^2+z^2\le 1$ 或 $2\le x^2+y^2+z^2\le 3$

所求體積 $=\frac{4}{3}\pi(\sqrt{3})^3-\frac{4}{3}\pi(\sqrt{2})^3+\frac{4}{3}\pi(\sqrt{1})^3=\frac{4}{3}\pi(3\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1)$

2. 兩球面 S_1：$x^2+y^2+z^2=16$ 與 S_2：$x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-4=0$ 的位置關係為
   (A)外離 (B)外切 (C)相交成一個圓 (D)內切 (E)內含。

Ans： (C)

解析：

S_1的球心為 $O(0，0，0)$，半徑 $R=4$，S_2的球心為 $Q(1，-1，1)$，半徑 $r=\sqrt{7}$ ，

連心線段長 $=\overline{OQ}=\sqrt{3}$ $\because$ $4-\sqrt{7}<3<4+\sqrt{7}$

$\therefore$ $R-r<\overline{OQ}<R+r$ $\therefore$ 兩球面相交成一個圓

3. 下列五個點，那一個點與面 S：$x^2+y^2+z^2-2x-2y+4z-3=0$ 距離最遠？
   (A)$(-1，-1，1)$ (B)$(1，2，3)$ (C)$(-3，-2，1)$ (D)$(-2，-3，-1)$
   (E)$(-3，-1，-2)$。

Ans： (C)

解析：

五個點代入 S 的方程式，依次得值為 8，17，25，17，11

$\because$ 五個點都在球面 S 的外部：$(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2>9$，

而$(-3，-2，1)$代入得值最大，即$(-3，-2，1)$到球心最遠

二、 填充題 (共 10 分)

1. 球心在 y 軸上且通過兩點$(0，2，2)$及$(4，0，0)$的球面方程式為__________。

Ans： $x^2+(y+2)^2+z^2=20$

解析：

球心在 y 軸上，設球心 $Q(0，b，0)$，因球過兩點 $A(0，2，2)$及 $B(4，0，0)$

$\therefore$ $\overline{QA}=\overline{QB}$ 得$(b-2)^2+4=4^2+b^2$ $\Rightarrow$ $b=-2$，

故球心 $Q(0，-2，0)$，半徑 $r=\overline{QA}=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}$，球面方程式為 $x^2+(y+2)^2+z^2=20$

2. (1)S：$x^2+y^2+z^2+2(m+1)x+2my+2mz+4m^2+4m-2=0$，若 S 表一球，則 m 之範圍是__________。(2)若此球之半徑爲 2，則球心爲__________。

Ans： (1) $-3<m<1$ (2)(0，1，1)

解析：

(1)$(x+m+1)^2+(y+m)^2+(z+m)^2=(m+1)^2+m^2+m^2-4m^2-4m+2=-m^2-2m+3$

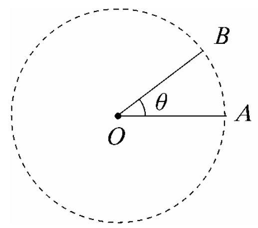
$\because$ S 表一球 $\Rightarrow$ $r^2=-m^2-2m+3>0$

$\Rightarrow$ $m^2+2m-3<0$ $\Rightarrow$ $-3<m<1$

(2) $r^2=-m^2-2m+3=4$ $\Rightarrow$ $m^2+2m+1=0$ $\Rightarrow$ $m=-1$，

故圓心 $=(m-1，-m，-m)=(0，1，1)$

3. 球面 S；$x^2+y^2+z^2=10$ 上有點 $A(1，0，-3)$，$B(-2，\sqrt{5}，1)$，一隻螞蟻沿著球面由 A 爬行至 B，其最小的路徑爲__________。



Ans： $\dfrac{2\sqrt{10}}{3}\pi$

解析：

球心爲 $O(0，0，0)$，半徑爲 $\sqrt{10}$，$\overrightarrow{OA}=(1，0，-3)$，

$\overrightarrow{OB}=(-2，\sqrt{5}，1)$

$\because$ $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}=\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cos\theta$

$\Rightarrow$ $-5=\sqrt{10}\sqrt{10}\cos\theta$

$\Rightarrow$ $\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $\theta=120°$。

$\overset{\frown}{AB}$ 長 $=2\pi(\sqrt{10})\cdot\dfrac{120°}{360°}=\dfrac{2\sqrt{10}}{3}\pi$ $\therefore$ 螞蟻爬行的最小路徑爲 $\dfrac{2\sqrt{10}}{3}\pi$

4. 球面 S 切 xy 平面於點(1，2，0)且過點(3，1，2)，則 S 的方程式爲__________。

Ans： $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-\dfrac{9}{4})^2=\dfrac{81}{16}$

解析：

球面 S 切 xy 平面於 $A(1，2，0)$，

設球心 Q，則 $\overline{QA}$ 垂直 xy 平面且 $\overline{QA}$ 爲球之半徑。

設 $Q(1，2，k)$，又 $B(3，1，2)$，則

$\overline{QA}=\overline{QB}=|k|$ $\Rightarrow$ $(3-1)^2+(-1)^2+(k-2)^2=k^2$ $\Rightarrow$ $k=\dfrac{9}{4}$

故球面 S 方程式爲$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-\dfrac{9}{4})^2=\dfrac{81}{16}$

5. 以 $A(-1，2，3)$和 $B(-3，6，7)$爲直徑兩端的球面方程式爲__________。

Ans：$(x+2)^2+(y-4)^2+(z-5)^2=9$

解析：

以 $A(-1，2，3)$和 $B(-3，6，7)$爲直徑兩端點的球面方程式爲

$(x+1)(x+3)+(y-2)(y-6)+(z-3)(z-7)=0$，

即 $x^2+y^2+z^2+4x-8y-10z+36=0$，即$(x+2)^2+(y-4)^2+(z-5)^2=9$

6. 球面 $3x^2+3y^2+3z^2-6x+9y-2=0$ 的球心坐標爲__________，半徑爲__________。

Ans： $(1，-\frac{2}{3}，0)$，$\frac{\sqrt{141}}{6}$

解析：

$x^2+y^2+z^2-2x+3y-\frac{2}{3}=0$，配方得 $(x-1)^2+(y+\frac{3}{2})^2+z^2=\frac{47}{12}$

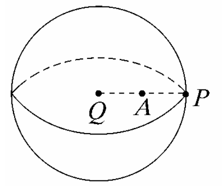
球心 $(1，-\frac{2}{3}，0)$，半徑 $\sqrt{\frac{47}{12}}=\frac{\sqrt{141}}{6}$

7. 球面 $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$ 上任一點 P，一定點 $A(0，1，2)$，求

(1) $\overline{PA}$ 的最小值爲__________。(2) $\overline{PA}$ 最小時，P 點的坐標爲__________。

Ans： (1) $3-\sqrt{3}$　(2) $(1-\sqrt{3}，2-\sqrt{3}，1+\sqrt{3})$

解析：



球面 $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$，球心 $Q(1，2，1)$，半徑 $r=3$，

定點 $A(0，1，2)$，$\overline{AQ}=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}<r \Rightarrow A$ 點在球面內部

(1) $\overline{PA}$ 的最小值 $=r-\overline{AQ}=3-\sqrt{3}$

(2)由(1)知 $\overline{AQ}:\overline{AP}=\sqrt{3}:(3-\sqrt{3}) \Rightarrow \overline{QA}:\overline{QP}=\sqrt{3}:3$

$\therefore\ \overrightarrow{QP}=\frac{3}{\sqrt{3}}\overrightarrow{QA}=\sqrt{3}(-1,-1,1)=(-\sqrt{3},-\sqrt{3},\sqrt{3})$

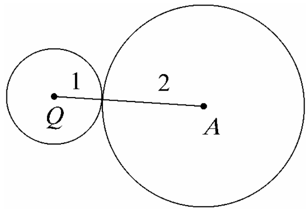
$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+(-\sqrt{3},-\sqrt{3},\sqrt{3})=(1,2,1)+(-\sqrt{3},-\sqrt{3},\sqrt{3})=(1-\sqrt{3},2-\sqrt{3},1+\sqrt{3})$

7. 給一球面 S：$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=1$ 及一點 $A(-1，0，0)$，以 A 爲球心而與切的球面有二個，一爲外切，一爲內切，則

(1)外切時的球面方程式爲__________。(2)內切時的球面方程式爲__________。

Ans： (1) $(x+1)^2+y^2+z^2=4$　(2) $(x+1)^2+y^2+z^2=16$

解析：



S：$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=1$，球心 $Q(1，-1，2)$，半徑 $r=1$

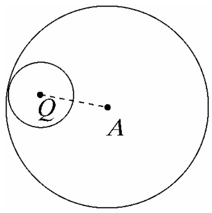
$A(-1，0，0)$，$\overline{AQ}=\sqrt{2^2+1+4}>r \Rightarrow A$ 在球面外

(1)兩球外切時，球之半徑爲 $\overline{AQ}-r=3-1=2$，所求球面方程式爲

$(x+1)^2+y^2+z^2=4$

(2)兩球內切時，球之半徑爲 $\overline{AQ}+r=3+1=4$，

所求球面方程式爲 $(x+1)^2+y^2+z^2=16$



8. 已知空間中二定點 $A(1，-3，1)$，$B(1，3，4)$ 及動點 $P(x，y，z)$ 滿足 $\overline{PA}:\overline{PB}=1:2$，則 P 點所成圖形的方程式爲__________。

Ans： $x^2+y^2+z^2-2x+10y+6=0$

解析：

$A(1，-3，1)$，$B(1，3，4)$，$P(x，y，z)$ 滿足 $\overline{PA}:\overline{PB}=1:2$，即 $\overline{PA}=2\overline{PB}$，$\overline{PB}^2=4\overline{PA}^2$

$\therefore\ (x-1)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=4[(x-1)^2+(y+3)^2+(z-1)^2]$，

展開，$x^2-2x+y^2-6y+z^2-8z+26=4(x^2+y^2+z^2-2x+6y-2z+11)$，

得 $3x^2+3y^2+3z^2-6x+30y+18=0 \Rightarrow x^2+y^2+z^2-2x+10y+6=0$

9. 已知球面 $x^2+y^2+z^2-2x+4y+6z-8=0$ 與 x 軸交於 A，B 兩點，則 $\overline{AB}$ 的長爲__________。

Ans： 6

解析：

設球面 $x^2+y^2+z^2-2x+4y+6z-8=0$ 與 x 軸交點爲$(a，0，0)$代入，

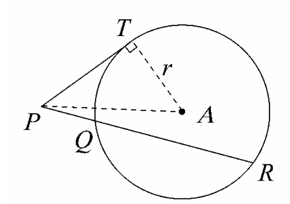
得 $a^2-2a-8=0 \Rightarrow (a+2)(a-4)=0 \Rightarrow a=-1，4$

故交點 A，B 的坐標分別爲$(-2，0，0)$，$(4，0，0)$，$\overline{AB}=|4-(-2)|=6$

10.球面 S：$2x^2+2y^2+2z^2-4x-8y-4z-1=0$ 外一點 $P(4，3，2)$，過 P 任作一直線交球面於 Q，R 兩點，$\overline{PQ}\times\overline{PR}$ 的值爲__________。

Ans： $\frac{9}{2}$

解析：



S：$x^2+y^2+z^2-2x-4y-2z-\frac{1}{2}=0$

$\Rightarrow (x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=\frac{13}{2}$，

球心 $A(1，2，1)$，半徑$\sqrt{\frac{13}{2}}$

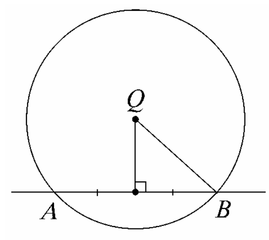
$\therefore P(4，3，2)$到 S 之切線段長 $\overline{PT}=\sqrt{\overline{PA}^2-r^2}=\sqrt{9+1+1-\frac{13}{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，

由切割線定理 $\overline{PQ}\times\overline{PR}=\overline{PT}^2=\frac{9}{2}$

11. 過兩點 $A(1，3，5)$，$B(7，3，-1)$之球面有無限多個，則其中半徑最小的方程式爲______。

Ans： $x^2+y^2+z^2-8x-6y-4z+11=0$

解析：



以 $\overline{AB}$ 爲直徑的球面，是過點 A，B 而半徑最小者，

其方程式爲$(x-1)(x-7)+(y-3)(y-3)+(z-5)(z+1)=0$

即 $x^2+y^2+z^2-8x-6y-4z+11=0$

12. 一球面 S 過點 $A(1，3，5)$，$B(7，3，-1)$，且球心 Q 在直線 L：$x-1=\frac{y}{-2}=\frac{z+3}{3}$上，則球面 S 的半徑爲__________。

Ans： $\sqrt{51}$

解析：

設球心 $Q(t+1，-2t，3t-3)$ $\because A \cdot B\in S$ $\therefore \overline{AQ}=\overline{BQ}=$ 半徑 r

$\Rightarrow \overline{AQ}^2=\overline{BQ}^2$

$\Rightarrow t^2+(2t+3)^2+(3t-8)^2=(t-6)^2+(2t+3)^2+(3t-2)^2$

$\Rightarrow t=1 \Rightarrow Q(2，-2，0)$ $\therefore$ 半徑 $r=\overline{AQ}=\sqrt{51}$