高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：93.01.02					
範圍	4-2 圓與直線+ANS	班級		姓名	
		座號			

一、複選題 (共 8 分)

1. 設$x^2+y^2-4x+ky+5=0$之圖形為一圓C，且點$(k，k-3)$在圓C之外部，則實數k可為(A) -3 (B) -1 (C) 1 (D) 3 (E) 5。

Ans： (A)(D)(E)

解析：

$x^2+y^2-4x+ky+5=0 \Rightarrow (x-2)^2+(y+\frac{k}{2})^2=-5+4+\frac{k^2}{4}=\frac{k^2}{4}-1$ 為一圓

$\therefore \frac{k^2}{4}-1>0 \Rightarrow k^2-4>0 \Rightarrow (k+2)(k-2)>0 \Rightarrow k>2$ 或$k<-2$……①

又點$(k，k-3)$在圓之外部，$k^2+(k-3)^2-4k+k(k-3)+5>0 \Rightarrow 3k^2-13k+14>0$

$\Rightarrow (3k-7)(k-2)>0 \Rightarrow k>\frac{7}{3}$ 或$k<2$……②

由①②得$k>\frac{7}{3}$或$k<-2$ $\therefore$ k可為 -3，3 或 5，選(A)(D)(E)

二、 填充題 (共 10 分)

1. 兩圓C_1：$x^2+y^2+6y-28=0$，C_2：$x^2+y^2+6x-4=0$ 相交於A，B兩點，則$\overleftrightarrow{AB}$方程式為__________。

Ans： $x-y+4=0$

解析： 圓系$\Rightarrow \overleftrightarrow{AB}$：$(x^2+y^2+6x-4)-(x^2+y^2+6y-28)=0 \Rightarrow \overleftrightarrow{AB}$：$x-y+4=0$

2. 點$(6，3)$至圓$x^2+y^2-4x+2y+3=0$的最短距離d，最長距離D，則$(d，D)=$__________。

Ans： $(3\sqrt{2}，5\sqrt{2})$

解析：

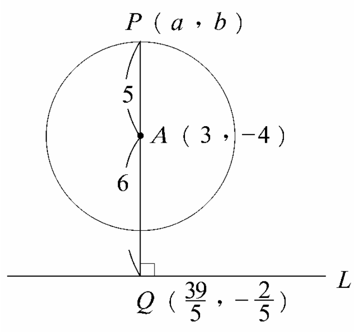
$x^2+y^2-4x+2y+3=0 \Rightarrow (x-2)^2+(y+1)^2=2$，

圓心$A(2，-1)$，半徑$r=\sqrt{2}$。

設$P(6，3)$ $\therefore$ $6^2+3^2-24+6+3>0$ $\therefore$ P點在圓外

$\therefore$ $d=\overline{PA}-r=\sqrt{16+16}-\sqrt{2}=4\sqrt{2}-\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

$D=\overline{PA}+r=4\sqrt{2}+\sqrt{2}=5\sqrt{2}$



3. 圓$x^2+y^2-6x+8y=0$上任一點P到直線$4x+3y=30$的距離最大值 =__________，此時P點的坐標為__________。

Ans： 11，$(-1，-7)$

解析：

(1)圓$x^2+y^2-6x+8y=0 \Rightarrow (x-3)^2+(y+4)^2=5^2$

圓心$A(3，-4)$，半徑 5， P點到直線L：$4x+3y=30$的最大距離

$$=d(A，L)+r=\frac{|12-12-30|}{\sqrt{4^2+3^2}}+5=\frac{30}{5}+5=11$$

(2)

(Sol一)設 $P(3+4t,-4+3t)$，代入 $x^2+y^2-6x+8y=0$

$(3+4t)^2+(-4+3t)^2-6(3+4t)+8(-4+3t)=0\Rightarrow t^2=1$

$t=\pm1\Rightarrow P(-1,-7)$

(Sol二)過 $A(3，-4)$，作 $L：4x+3y=30$ 的垂直線 $L'：3x-4y=25$，

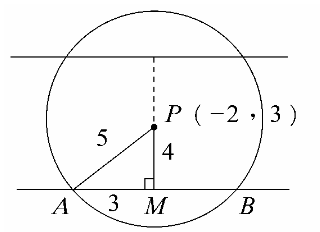
L 與 L' 交點 $Q(\frac{39}{5}，-\frac{2}{5})$，因 $\overline{AP}=5$，$\overline{AQ}=6$，

設 $P(a，b)$，則由分點公式得 $(3，-4)=(\frac{6a+39}{5+6}，\frac{6b-2}{5+6})$

$$\begin{cases}6a+39=33\\6b-2=-44\end{cases}\Rightarrow (a，b)=(-1，-7)$$

4. 直線 $3x-4y=k$ 與圓 $x^2+y^2+4x-6y-12=0$ 交於 A、B 兩點，若 $\overline{AB}=6$，則 k 之值爲_____。

Ans： $k=2$ 或 -38



解析：

圓 $x^2+y^2+4x-6y-12=0\Rightarrow(x+2)^2+(y-3)^2=5^2$

圓心 $P(-2，3)$，半徑 $r=5$。

過 P 作直線 $3x-4y=k$ 的垂直線垂足 M，則 M 爲 $\overline{AB}$ 中點

$\therefore\ \overline{AM}=3$，又 $\overline{PA}=r=5\quad\therefore\ \overline{PM}=4$

$\therefore\ d(P，\overline{AB})=\frac{|-6-12-k|}{\sqrt{9+16}}=4\Rightarrow k+18=\pm20$，$\therefore\ k=2$ 或 -38

5. 若圓 $x^2+y^2-6x+ky+\ell=0$ 切直線 $3x-4y=8$ 於點 $(4，1)$，則 $2k+\ell$ 的值爲__________。

Ans：$\frac{7}{3}$

解析：

圓 $x^2+y^2-6x+ky+\ell=0$ 切直線 $3x-4y=8$ 於點 $(4，1)$，

故圓在點 $(4，1)$ 的切線方程式 $4x+y-6\cdot\frac{4+k}{2}+k\frac{1+k}{2}+\ell=0$

$\Rightarrow\ 2x+(2+k)y+k+2-24=0$，此即爲 $3x-4y-8=0$

$\therefore\ \frac{2}{3}=\frac{2+k}{-4}=\frac{k+2\ell-24}{-8}$ 解得 $k=\frac{-14}{3}$，$\ell=\frac{35}{3}$，所求 $2k+\ell=\frac{-28}{3}+\frac{35}{3}=\frac{7}{3}$

6. 過點 $A(1，1)$，作直線 L 與圓 $C：x^2+y^2-2x+6y+1=0$ 交於 P，Q 兩點，則 $\overline{AP}\cdot\overline{AQ}$ 之積爲__________。

Ans： 7

解析：

點 A 在圓 C 之外部；圓 C 的圓心爲 $B(1，-3)$，半徑 $r=3$，

外冪性質：$\overline{AP} \cdot \overline{AQ}=(\text{切線段長})^2=(\sqrt{1^2+1^2-2\times1+6\times1+1})^2=7$

7. 設$k\in R$，已知點$P(-1，7)$在$C：x^2+y^2+kx+(k-2)y-12=0$上，則圓C過P點的切線方程式爲__________。

Ans： $3x-4y+31=0$

解析：

點$P(-1，7)$在圓$C：x^2+y^2+kx+(k-2)y-12=0$上

$\Rightarrow\ 1^2+7^2-k+7k-14-12=0\ \Rightarrow\ k=-4$，　圓$C：x^2+y^2-4x-6y-12=0$。

代入切線方程式：$-x+7y-\frac{4}{2}(x-1)-\frac{6}{2}(y+7)-12=0$

$\Rightarrow\ -x+7y-2x+2-3y-21-12=0\Rightarrow\ 3x-4y+31=0$

8. (1)設有一圓$C：x^2+y^2-4x-4y-2=0$，$A(1，5)$，過A之切線方程式爲__________。

(2) $B(-1，-5)$，過圓C之二切線，切點爲P，Q，則直線PQ之方程式爲__________。

(3)$\triangle BPQ$之外接圓爲$x^2+y^2+ax+by+c=0$，則序組$(a，b，c)=$__________。

Ans： (1) $x-3y+14=0$　(2) $3x+7y-10=0$　(3)$(-1，3，-12)$

解析：

(1) $A\in C\ \Rightarrow$ 切線爲 $1\cdot x+5\cdot y-4\cdot\frac{x+5}{2}-4\cdot\frac{y+5}{2}-2=0$

$\Rightarrow\ -x+3y-14=0\ \Rightarrow\ x-3y+14=0$

(2) $B\in C$之外部$\Rightarrow$切點弦$\overline{PQ}$所在之直線爲 $-1\cdot x-5\cdot y-4\cdot\frac{x-1}{2}-4\cdot\frac{y-5}{2}-2=0$

$\Rightarrow\ -3x-7x+10=0\ \Rightarrow\ 3x+7y-10=0$

(3)所求爲以$\overline{OB}$爲直徑的圓，其中O爲圓C之圓心，

$(x-2)(x+1)+(y-2)(y+5)=0\ \Rightarrow\ x^2+y^2-x+3y-12=0$

$\Rightarrow\ (a，b，c)=(-1，3，-12)$

9. 一圓C過點$(2，1)$且與兩坐標軸均相切，則圓C的方程式爲__________。（有二解）

Ans： $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 或 $(x-5)^2+(y-5)^2=25$

解析：

圓C過點$(2，1)$且與x軸，y軸均相切$\Rightarrow$圓心必在第一象限內且與x軸，y軸等距。

設圓心$(a，a)$，半徑a，則圓的方程式爲：$(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$。

過點$(2，1)\ \Rightarrow\ (2-a)^2+(1-a)^2=a^2\ \Rightarrow\ a^2-6a+5=0\Rightarrow\ a=1$ 或$a=5$。

故圓的方程式爲$(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 或 $(x-5)^2+(y-5)^2=25$

10. 求直線$x+2y-3=0$垂直且與圓$x^2+y^2-2x+2y+1=0$相切的直線方程式__________。

Ans： $2x-y-3+\sqrt{5}=0$ 或 $2x-y-3-\sqrt{5}=0$

解析：

設切線方程式爲 $2x-y+k=0$，圓：$x^2+y^2-2x+2y+1=0$

$\Rightarrow\ (x-1)^2+(y+1)^2=1$，圓心$(1，-1)$，半徑 $=1$

$\Rightarrow \quad \dfrac{|2-(-1)+k|}{\sqrt{2^2+1^2}} = 1 \quad \Rightarrow \quad |3+k| = \sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad k = -3 \pm \sqrt{5}$

$\therefore$ 切線方程式爲 $2x-y-3+\sqrt{5}=0$ 或 $2x-y-3-\sqrt{5}=0$

11. 已知圓C：$x^2+y^2+4x-6y+11=0$ 與直線$x+y+k=0$ 相切，則$k=$__________。

Ans： 1 或 -3

解析：

圓C：$x^2+y^2+4x-6y+11=0 \quad \Rightarrow \quad (x+2)^2+(y-3)^2=2$，與直線$x+y+k=0$ 相切

$\therefore \quad \dfrac{|-2+3+k|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \sqrt{2}$

$\Rightarrow \quad |1+k|=2 \quad \Rightarrow \quad 1+2k+k^2=4 \quad \Rightarrow \quad k^2+2-3=0$

$\Rightarrow \quad (k-1)(k+3)=0$，$\therefore \quad k=1$ 或 -3

12. 求點$P(2，-5)$到圓C：$x^2+y^2+2x+3y-4=0$ 所作切線段的長爲__________。

Ans： $\sqrt{14}$

代入切線長公式切線段長 $=\sqrt{2^2+(-5)^2+2(2)+3(-5)-4}=\sqrt{14}$

13. 試求通過$x^2+y^2+2x-4y+1=0$ 與直線 $2x-y+4=0$ 的交點，且切於x軸的圓方程式：

。（兩解）

Ans： $x^2+y^2+2x-4y+1=0$ 或$x^2+y^2+6x-6y+9=0$

解析：

設過圓與直線的圓爲$x^2+y^2+2x-4y+1+\alpha(2x-y+4)=0$，(圓系)

切於x軸$\Rightarrow y=0$ 代入 $x^2+2x+1+\alpha(2x+4)=0 \Rightarrow x^2+(2\alpha+2)x+(4\alpha+1)=0$ 恰有一解

$D=0 \Rightarrow (2\alpha+2)^2-4\times1\times(4\alpha+1)=0 \Rightarrow \quad \alpha=0$ 或 2

$\therefore \quad x^2+y^2+2x-4y+1=0$ 或$x^2+y^2+6x-6y+9=0$