<table>
<tr><td colspan="6">高雄市明誠中學 高二數學平時測驗　　日期：93.01.02</td></tr>
<tr><td rowspan="2">範圍</td><td rowspan="2">4-1 圓方程式+ANS</td><td>班級</td><td></td><td rowspan="2">姓名</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>座號</td><td></td></tr>
</table>

一、複選題 (共 8 分)

1. 在xy平面上，下列各方程式之圖形何者表示一圓？

(A)$(x-1)^2+(y-1)^2=3$　(B) $x^2+y^2+2x+4y+5=0$　(C) $y=\sqrt{1-x^2}$

(D)$\begin{cases} x=1+2\sin\theta \\ y=2+2\cos\theta \end{cases}$，$\theta\in R$　(E)$(x-1)(x+1)+(y-2)(y-3)=0$

答案： (A)(D)(E)

解析：

(A) $(x-1)^2+(y-1)^2=3$ 為一圓

(B) $x^2+y^2+2x+4y+5=0 \Rightarrow (x+1)^2+(y+2)^2=-5+1+4=0$ 為一點$(-1，-2)$

(C) $y=\sqrt{1-x^2} \Rightarrow y^2=1-x^2 \Rightarrow x^2+y^2=1$，但 $1-x^2\geq 0$，故圖形為圓之上半部

(D)$\begin{cases} x=1+2\sin\theta \\ y=2+2\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin\theta=\dfrac{x-1}{2} \\ \cos\theta=\dfrac{y-1}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow \sin^2\theta+\cos^2\theta=(\dfrac{x-1}{2})^2+(\dfrac{y-2}{2})^2=1 \Rightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=4$ 表一圓

(E)$(x-1)(x+1)+(y-2)(y-3)=0 \Rightarrow x^2-1+y^2-5y+6=0$

$\Rightarrow x^2+(y-\dfrac{5}{2})^2=-6+1+\dfrac{25}{4}=\dfrac{5}{4}$ 為一圓

二、 填充題 (共 10 分)

1. 圓心在直線$y=2x+3$ 上且過兩點$(1，2)$，$(-2，3)$的圓之方程式為__________。

答案： $(x+1)^2+(y-1)^2=5$

解析：

設圓心$Q(a，d)$，圓心在直線$y=2x+3$ 上

$\therefore\ b=2a+3\cdots\cdots$①

設$A(1，2)$，$B(-2，3)$，則

$\overline{QA}=\overline{QB} \Rightarrow (a-1)^2+(b-2)^2=(a+2)^2+(b-3)^2$

$\Rightarrow\ b=3a+4\cdots\cdots$②

解①②得$a=-1$，$b=1$，又$\overline{QA}=\sqrt{(a-1)^2+(b-2)^2}=\sqrt{4+1}$

$=\sqrt{5}$，

故所求圓的方程式為$(x+1)^2+(y-1)^2=5$

2. 圓$x^2+y^2+ax+by+2=0$與x軸交於兩點$A(x_1，0)$，$B(x_2，0)$，與y軸交於兩點$C(0，y_1)$，$D(0，y_2)$，且$\overline{AB}$中點$(2，0)$，$\overline{CD}$中點$(0，2)$，則此圓的圓心坐標為__________。

答案： (2，2)

解析：

圓的圓心為$\overline{AB}$與$\overline{CD}$的中垂線交點，因$\overline{AB}$中點$(2，0)$，$\overline{CD}$中點$(0，2)$，

故$\overline{AB}$，$\overline{CD}$中垂線方程式分別為$x=2$及$y=2$，其交點為$(2，2)$

3. 點$(6，3)$至圓$x^2+y^2-4x+2y+3=0$的最短距離d，最長距離D，則$(d，D)=$__________。

答案：$(3\sqrt{2}，5\sqrt{2})$

解析：

$x^2+y^2-4x+2y+3=0 \Rightarrow (x-2)^2+(y+1)^2=2$，圓心$A(2，-1)$，半徑$r=\sqrt{2}$。

設$P(6，3)$ $\therefore$ $6^2+3^2-24+6+3>0$ $\therefore$ P點在圓外

$\therefore$ $d=\overline{PA}-r=\sqrt{16+16}-\sqrt{2}=4\sqrt{2}-\sqrt{2}=3\sqrt{2}$；$D=\overline{PA}+r=4\sqrt{2}+\sqrt{2}=5\sqrt{2}$

4. 設$P_1(1，2)$，$P_2(5，-2)$，已知$\overline{P_1P_2}$為圓C的一弦且此弦與圓心距離$\sqrt{2}$，則此圓的方程式為__________。（兩解）

答案：. $(x-4)^2+(y-1)^2=10$ 或 $(x-2)^2+(y+1)^2=10$

解析：

設圓心$P(a，b)$，$\overline{P_1P_2}$中點$M(3，0)$，$\overrightarrow{P_1P_2}\ \overrightarrow{P_1P_2}=(4，-4)$，$\overrightarrow{MP}=(a-3，b)$

$\because$ $\overrightarrow{MP}\perp\overrightarrow{P_1P_2}$ $\therefore$ $\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\overrightarrow{MP}=0\Rightarrow$ $4(a-3)-4b=0$ $\Rightarrow$ $a-b=3$……①

又$\overline{PM}=\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ $(a-3)^2+2b=2$……②

①代入②$(b+3-3)^2+b^2=2$ $\Rightarrow$ $b^2=1$ $\Rightarrow$ $b=\pm1$

$\therefore$ $(a，b)=(4，1)$ 或 $(2，-1)$

圓半徑$r=\overline{PP_1}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$，故方程式為$(x-4)^2+(y-1)^2=10$或$(x-2)^2+(y+1)^2=10$

5. 設A點在圓$x^2+y^2=4$上移動，B點在圓$x^2+y^2=16$上移動，則所有$\overline{AB}$中點所成圖形的面積 =__________。

答案：. 8π

解析：

設$A(2\cos\alpha，2\sin\alpha)$，$B(4\cos\beta，4\sin\beta)$，$\overline{AB}$中點$P(x，y)$，

則$x=\dfrac{1}{2}(2\cos\alpha+4\cos\beta)=\cos\alpha+2\cos\beta$

$y=\dfrac{1}{2}(2\sin\alpha+4\sin\beta)=\sin\alpha+2\sin\beta$，

$x^2+y^2=(\cos\alpha+2\cos\beta)^2+(\sin\alpha+2\sin\beta)^2=5+4\cos(\alpha-\beta)$

$\because$ $-1\le\cos(\alpha-\beta)\le1$ $\therefore$ $1\le x^2+y^2\le9$，

圖形面積 $=9\pi-\pi=8\pi$

6. 圓C：$(x-1)^2+(y+2)^2=16$過點$A(-2，-1)$的所有弦之中點跡方程式為__________。

答案：. $x^2+y^2+x+3y=0$

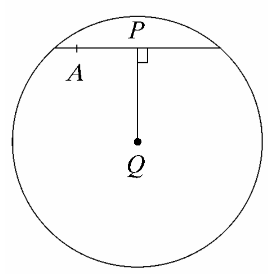
解析：

圓C的圓心為$Q(1，-2)$，而點A在圓C的內部

$\therefore$ $P(x，y)$在軌跡上 $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AP}=0$

$\Leftrightarrow\quad (x+2，y+1)\cdot(x-1，y+2)=0$

$\Leftrightarrow\quad (x+2)(x-1)+(y+1)(y+2)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2+y^2+x+3y=0$



7. 圓C：$x^2+y^2-6x-8y+16=0$

(1)關於點(1，2)對稱的圖形方程式為＿＿＿＿＿＿＿＿。

(2)關於直線$y=-x$對稱的圖形方程式為＿＿＿＿＿＿＿＿。

答案： $(x+1)^2+y^2=9$，$(x+4)^2+(y+3)^2=9$

C：$(x-3)^2+(y-4)^2=3^2$，圓心$A(3，4)$，半徑$r=3$

(1) A關於(1，2)之對稱點為$(2-3，4-4)=(-1，0)$

$\therefore$ 對稱圓的方程式為$(x+1)^2+y^2=3^2$

(2)A關於$y=-x$的對稱點為$(-4，-3)$，

故對稱圓的方程式為$(x+4)^2+(y+3)^2=3^2$

8. 已知三角形由三直線$y=0$，$3x-2y+3=0$，$x+y-4=0$所圍成，則其外接圓的方程式為＿＿＿＿＿＿＿＿，其直徑為＿＿＿＿＿＿＿＿。

答案： $x^2+y^2-3x-y-4=0$，$\sqrt{26}$

解$\begin{cases}y=0\\3x-2y+3=0\end{cases}$得$A(-1，0)$，解$\begin{cases}y=0\\x+y-4=0\end{cases}$得$B(4，0)$，解$\begin{cases}3x-2+3y=0\\x+y-4=0\end{cases}$得$C(1，3)$

設三角形ABC外接圓的方程式為$x^2+y^2+dx+ey+f=0$，

將A，B，C之坐標代入得$\begin{cases}1-d+f=0\\16+4d+f=0\\10+d+3e+f=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad d=-3，e=-1，f=-4$

$\therefore$ 圓的方程式為$x^2+y^2-3x-y-4=0 \Rightarrow (x-\dfrac{3}{2})^2+(y-\dfrac{1}{2})^2=\dfrac{26}{4}$，

半徑$r=\sqrt{\dfrac{26}{4}}=\dfrac{\sqrt{26}}{2} \quad\Rightarrow\quad$ 直徑 $2r=\sqrt{26}$

9. 過圓C：$x^2+y^2-2x+4y-11=0$內一點$A(-2，-1)$的所有弦的中點軌跡方程式為＿＿＿＿＿＿＿＿。

答案： $x^2+y^2+x+3y=0$

解析：

C：$(x-1)^2+(y+2)^2=4^2$，圓心$B(1，-2)$，

圓內過$A(-2，-1)$的所有弦的中點軌跡為以$\overline{AB}$為直徑之圓，其方程式為

$(x-1)(x+2)+(y+2)(y+1)=0$，即$x^2+y^2+x+3y=0$

10. 一圓與圓$x^2+y^2-4x+6y-3=0$同心，並且過點$(-1，1)$，則此圓的方程式為＿＿＿＿＿＿。

答案：$x^2+y^2-4x+6y-12=0$

解析：

與圓$x^2+y^2-4x+6y-3=0$同心的圓方程式可設為$x^2+y^2-4x+6y+k=0$，

過點$(-1，1)$，$(-1)^2+1^2+4+6+k=0 \quad\Rightarrow\quad k=-12$，

所求為$x^2+y^2-4x+6y-12=0$

11. 過$A(3，-1)$，$B(-1，5)$二點，且$\overline{AB}$之弦心距為$\sqrt{13}$之圓有二個，其中之一為$x^2+y^2+ax+by+6=0$，則數對$(a，b)=$__________。

答案： $(-8，-8)$

解析：

$\overline{AB}$之中點$M(1，2)$，$\overrightarrow{AB}=(-4，6)=2(-2，3)$

圓心$O_1=(1，2)+\sqrt{13}(\frac{3}{\sqrt{13}}，\frac{2}{\sqrt{13}})=(4，4)$

$O_2=(1，2)-\sqrt{13}(\frac{3}{\sqrt{13}}，\frac{2}{\sqrt{13}})=(-2，0)$

半徑$r^2=1+25=26 \Rightarrow C_1：(x-4)^2+(y-4)^2=26 \Rightarrow x^2+y^2-8x-8y+6=0$

$C_2：(x+2)^2+y^2=26 \Rightarrow x^2+y^2+4x-22=0$

$\therefore (a，b)=(-8，-8)$

12. 設$A(-1，3)$，$B(2，4)$，$C(6，2)$，$\triangle ABC$之外接圓方程式為$x^2+y^2+ax+by+c=0$，則$b+c=$__________。

答案： -18

解析：

$$\begin{cases}-a+3b+c+10=0\\2a+4b+c+20=0\\6a+2b+c+40=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3a+b+10=0\\4a-2b+20=0\end{cases} \Rightarrow 10a+40=0$$

$\Rightarrow a=-4，b=2，c=-20 \Rightarrow b+c=-18$

13. 圓心在第一象限，通過$A(1，1)$和$B(2，2)$兩點且與x軸相切的圓方程式為__________。

答案： $(x-2)^2+(y-1)^2=1$

解析：

圓心在第一象限，且與x軸相切，設圓心$(a，b)$，$a>0$，$b>0$，半徑 $=b$

$\therefore$ 圓方程式：$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$，過$(1，1)$，$(2，2)$

$$\Rightarrow \begin{cases}(1-a)^2+(1-b)^2=b^2\\(2-a)^2+(2-b)^2=b^2\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}1-2a+a^2+1-2b=0 \cdots\cdots ①\\4-4a+a^2+4-4b=0 \cdots\cdots ②\end{cases}$$

$① \times 2-②$得$a^2-4=0$ $\therefore a=2$ 代入①得$b=1$

$\therefore$ 圓方程式為$(x-2)^2+(y-1)^2=1$

14. 已知一圓通過兩點$A(1，-2)$和$B(4，3)$，且圓心在y軸上，則此圓的方程式為__________。

答案： $x^2+(y-2)^2=17$

解析：

設圓心坐標為$O(0，b)$，此圓過$A(1，-2)$及$B(4，3)$，則$\overline{AO}=\overline{BO}$

$\therefore \quad 1^2+(b+2)^2=4^2+(b-3)^2$

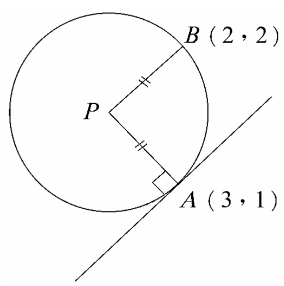
$\Rightarrow \quad 1+b^2+4b+4=16+b^2-6b+9$

$\Rightarrow \quad 10b=20 \quad \Rightarrow \quad b=2$

半徑$=\sqrt{1^2+(2+2)^2}=\sqrt{17}$，即此圓方程式爲$x^2+(y-2)^2=17$

15. 一圓C切直線 $2x-y=5$ 於點$(3，1)$且通過點$(2，2)$，則圓C的圓心坐標爲__________，圓的方程式爲____________________。

答案：$(\frac{7}{3}，\frac{4}{3})$，$(x-\frac{7}{3})^2+(y-\frac{4}{3})^2=\frac{5}{9}$



解析：

圓C切直線 $2x-y=5$ 於點$A(3，1)$，

故圓心P在通過$A(3，1)$且垂直的直線$x+2y=5$ 上。

設$P(-2t+5，t)$，因圓C通過點$B(2，2)$，故$\overline{PA}=\overline{PB}$。

於是$(-2t+2)^2+(t-1)^2=(-2t+3)^2+(t-2)^2 \quad \Rightarrow \quad t=\frac{4}{3}$

$\therefore$ 圓心$P(\frac{7}{3}，\frac{4}{3})$，半徑$r=\overline{PA}=\sqrt{\frac{5}{9}}$，圓$C$的方程式爲$(x-\frac{7}{3})^2+(y-\frac{4}{3})^2=\frac{5}{9}$

16. 在坐標平面上，已知兩個定點$A(3，5)$，$B(-10，4)$；設$P(x，y)$爲動點且已知$\overline{PA}：\overline{PB}=2：3$，則動點$P(x，y)$之軌跡方程式______________________________。

答案：$5x^2+5y^2-134x-58y-158=0$

解析：

由已知$\overline{PA}：\overline{PB}=2：3$ 得

$\sqrt{(x-3)^2+(y-5)^2}：\sqrt{(x+10)^2+(y-4)^2}=2：3$

$\therefore \quad 9[(x-3)^2+(y-5)^2]=4[(x+10)^2+(y-4)^2]$

$\Rightarrow \quad 9(x^2+y^2-6x-10y+34)=4(x^2+y^2+20x-8y+116)$

$\Rightarrow \quad 5x^2+5y^2-134x-58y-158=0$