高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：92.12.22					
範圍	3-3 克拉瑪+ANS	班級		姓名	
		座號			

一、 填充題 (每題 10 分)

1. 設方程組 $\begin{cases} kx-y+2z=0 \\ x+y-z=0 \\ 3x+y=0 \end{cases}$ 有異於(0，0，0) 的解，則實數k之值爲__________。

答案： 1

解析：

$\because$ $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z=0 \end{cases}$ 必有(0，0，0) 的解，此方程式恰有一組解 $\Leftrightarrow$ $\triangle \neq 0$

$\therefore$ 此方程組有(0，0，0)以外的解 $\Leftrightarrow$ $\triangle = 0$

原方程組有異於(0，0，0)的解 $\Rightarrow$ $\begin{vmatrix} k & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$ $k=1$

2. 若a，$b \in R$且已知方程組 $\begin{cases} x+4y+az=5 \\ 2x+y+3z=b \\ 3x+2y-z=0 \end{cases}$ 有無限多組解，則(a，b) =__________。

答案：$(-37，-\frac{1}{2})$

解析：

方程組有無限多組解 $\Rightarrow$ $\triangle = \begin{vmatrix} 1 & 4 & a \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$ $\Rightarrow$ $a=-37$ 代回原方程組

$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & b \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ $b=-\frac{1}{2}$

$\therefore$ $(a，b) = (-37，-\frac{1}{2})$

3. 已知$xyz \neq 0$ 且 $8x-3y-6z=0$，$10x-5y-8z=0$，則$\dfrac{3x^2-2y^2+z^2-5xy}{4x^2-5y^2-6z^2+2zx}$之值爲_______。

答案：$-\frac{37}{52}$

解析：

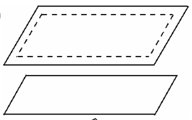
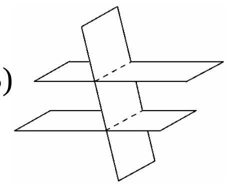
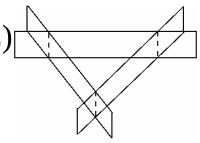
$$\begin{cases} 8x-3y-6z=0 \\ 10x-5y-8z=0 \end{cases} \Rightarrow \quad x:y:z=\begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -5 & -8 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} -6 & 8 \\ -8 & 10 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 8 & -3 \\ 10 & -5 \end{vmatrix}$$

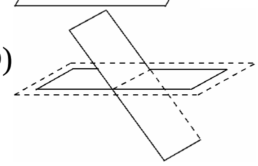
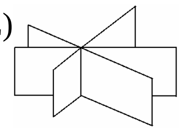
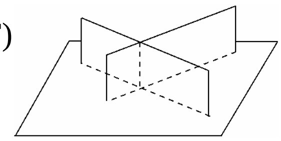
$$=(-6):4:(-10)=3:(-2):5$$

令 $x=3k$，$y=-2k$，$z=5k$ 代入，則

原式 $=\dfrac{3(3k)^2-2(-2k)^2+(5k)^2-5(3k)(-2k)}{4(3k)^2-5(-2k)^2-6(5k)^2+2(5k)(3k)}=-\dfrac{27-8+25+30}{36-20-150+30}=-\dfrac{37}{52}$

4. 判斷下列聯立方程式之解，從下列圖(A)到圖(F)中，選出各聯立方程式所代表之平面的關係：(1)$\begin{cases} x-y+z=4 \\ 2x+y-z=1 \\ 2x+y+z=0 \end{cases}$ (2)$\begin{cases} x=0 \\ z=0 \\ x+z=1 \end{cases}$ (3)$\begin{cases} x+y-2z=1 \\ 2x+y-z=2 \\ 3x+2y-3z=3 \end{cases}$ (4)$\begin{cases} z=1 \\ z=2 \\ x+y+z=1 \end{cases}$

(A) 
(B) 
(C) 

(D) 
(E) 
(F) 

答案：(1)(F)　(2)(C)　(3)(E)　(4)(B)

解析：

(1) x，y，z之係數比皆不相等　$\Rightarrow$　三平面相異且兩兩不平行

又$\triangle=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=6\neq 0$　$\therefore$　三平面相交於一點，故選(F)

(2) x，y，z之係數比皆不相等　$\Rightarrow$　三平面相異且兩兩不平行

又$\triangle=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$，$\triangle_x=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$，$\triangle_y=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$

$\therefore$　三平面兩兩相交於一直線，且交線兩兩平行，故選(C)

(3) x，y，z之係數比皆不相等　$\Rightarrow$　三平面相異且兩兩不平行

又$\triangle=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix}=0$，$\triangle_x=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix}=0$，$\triangle_y=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & -3 \end{vmatrix}=0$，

$\triangle_z=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}=0$，　三平面相交於一線，故選(E)

(4) $z=1$ 與$z=2$ 兩平面平行

$$\triangle=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&0&1\\1&0&1\end{vmatrix}=0\text{，}\triangle_x=\begin{vmatrix}1&0&1\\2&0&1\\1&1&1\end{vmatrix}=1\neq 0\ \triangle_y=\begin{vmatrix}0&1&1\\0&2&1\\1&1&1\end{vmatrix}=-1\neq 0\text{，}\triangle_z=\begin{vmatrix}0&0&1\\0&0&2\\1&1&1\end{vmatrix}=0$$

$\therefore z=1$ 與 $z=2$ 兩平面平行，而 $x+y+z=1$ 與此二平行平面分別交於一直線，選(B)

5. 就 a 之值，討論方程組 $\begin{cases}x+y-z=1\\2x+3y+az=3\\x+ay+3z=2\end{cases}$ 的解。

解析：

(1) $\triangle=\begin{vmatrix}1&1&-1\\2&3&a\\1&a&3\end{vmatrix}=-a^2-a+6=-(a-2)(a+3)$

$\triangle_x=-(a-2)(a+3)$，$\triangle_y=-(a-2)$，$\triangle_z=-(a-2)$

(2)當 $\triangle\neq 0$，$a\neq 2$，-3 則三平面共點，而方程組恰有一組解$\left(1\text{，}\dfrac{1}{a+3}\text{，}\dfrac{1}{a+3}\right)$

(2)當 $a=2$ 時，$\triangle=0$，$\triangle_x=\triangle_y=\triangle_z=0$

$\begin{cases}x+y-z=1\\2x+3y+2z=3\\x+2y+3z=2\end{cases}$ 交於一直線 L：$\dfrac{x}{5}=\dfrac{y-1}{-4}=\dfrac{z}{1}$

$\therefore$ 原方程組有無限多組解 $(5t\text{，}-4t+1\text{，}t)$，$t\in R$

(3)當 $a=-3$ 時，$\triangle=0$，$\triangle_x=0$，$\triangle_y\neq 0$，$\triangle_z\neq 0$， 原方程組無解

6. 若方程組 $\begin{cases}kx+y+z=1\\x+ky+z=k\\x+y+kz=k^2\end{cases}$ 無解，則 $k=$__________。

答案：-2

令 $\triangle=\begin{vmatrix}k&1&1\\1&k&1\\1&1&k\end{vmatrix}=(k+2)\begin{vmatrix}1&1&1\\1&k&1\\1&1&k\end{vmatrix}=(k+2)\begin{vmatrix}1&0&0\\1&k-1&0\\1&0&k-1\end{vmatrix}=(k+2)(k-1)^2$

$\times(-1)$

當 $\triangle=0$ 時 $\Rightarrow$ $k=-1$，-2

(1) $k=1$ 時 $\Rightarrow$ $\begin{cases}x+y+z=1\\x+y+z=1\\x+y+z=1\end{cases}$ 有無限多解

(2) $k=-2$ 時 $\Rightarrow$ $\begin{cases}-2x+y+z=1 &\cdots\cdots①\\x-2y+z=-2 &\cdots\cdots②\\x+y-2z=4 &\cdots\cdots③\end{cases}$

① + ② × 2 得 $-3y+3z=-3$⋯⋯④

②$-$③得 $-3y+3z=-6$……⑤

④$-$⑤得 $0=3$ 不合，　當$k=-2$ 時，方程組無解

7. 設$a\in R$，E_1：$ax+y+z=a-3$，E_2：$x+ay+z=-2$，E_3：$x+y+az=-2$，若E_1，E_2，E_3兩兩相交於一直線，而且三交線互相平行，則$a=$__________。

答案：$a=-2$

若三平面兩兩相交於一直線，且三交線互相平行，則

$\triangle=0$，且$\triangle_x$，$\triangle_y$，$\triangle_z$中至少有一個不爲 0

令$\triangle=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=a^3-3a+2=(a-1)^2(a+2)=0$，　$a=1$ 或 -2

又$\triangle_x=\begin{vmatrix} a-3 & 1 & 1 \\ -2 & a & 1 \\ -2 & 1 & a \end{vmatrix}=a^3-3a^2+3a-1=(a-1)^3$

$\triangle_y=\begin{vmatrix} a & a-3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & a \end{vmatrix}=-3a^2+6a-3=-3(a-1)^2$

$\triangle_z=\begin{vmatrix} a & 1 & a-3 \\ 1 & a & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=-3a^2+6a-3=-3(a-1)^2$

①當$a=1$ 時，$\triangle=0$，但$\triangle_x=\triangle_y=\triangle_z=0$，故不合

②當$a=-2$ 時，$\triangle=0$ 且$\triangle_x\neq 0$，$\triangle_y\neq 0$，$\triangle_z\neq 0$，故$a=-2$

8. 利用<u>克拉瑪</u>公式，求x，y，z的方程組$\begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+by+cz=d \\ a^2x+b^2y+c^2z=d^2 \end{cases}$ 的解。(其中a，b，c爲兩兩相異的實數，d爲實數)

答案：$\begin{cases} x=\dfrac{\triangle_x}{\triangle}=\dfrac{(a-b)(c-a)}{(d-b)(c-d)} \\ y=\dfrac{\triangle_y}{\triangle}=\dfrac{(a-d)(d-c)}{(a-b)(b-c)} \\ z=\dfrac{\triangle_z}{\triangle}=\dfrac{(b-d(d-a)}{(b-c)(c-a)} \end{cases}$

解析：

$\triangle=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(c-a)$

$$\triangle_x=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ d & b & c\\ d^2 & b^2 & c^2\end{vmatrix}=(d-b)(b-c)(c-d)$$

$$\triangle_y=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & d & c\\ a^2 & d^2 & c^2\end{vmatrix}=(a-b)(d-c)(c-a)$$

$$\triangle_z=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & d\\ a2 & b^2 & d^2\end{vmatrix}=(a-b)(b-d)(d-a)$$

$\because$ a，b，c兩兩相異 $\Rightarrow$ $\triangle\neq 0$

$\therefore$ 方程組恰有一解，其解為$\begin{cases} x=\dfrac{\triangle_x}{\triangle}=\dfrac{(a-b)(c-a)}{(d-b)(c-d)}\\ y=\dfrac{\triangle_y}{\triangle}=\dfrac{(a-d)(d-c)}{(a-b)(b-c)}\\ z=\dfrac{\triangle_z}{\triangle}=\dfrac{(b-d(d-a)}{(b-c)(c-a)}\end{cases}$