高雄市明誠中學 高二數學平時測驗　　日期：92.12.19					
範圍	3-2 行列式+ANS	班級		姓名	
		座號			

一、單選題 (每題 10 分)

1. 設多項式 $f(x)=\begin{vmatrix} 2 & x+1 & 3x^2-1 \\ x & x^2-2 & x-3 \\ x^2-1 & x+2 & x-1 \end{vmatrix}$，則下列敘述何者正確？

(A) $f(x)$的常數項爲 21　(B) $f(x)$的各項係數和爲 18　(C) $f(x)$的各奇次項係數和爲 4
(D) $f(x)$的各偶次項係數和爲 14　(E)　$f(x)$的領導係數爲 3。

答案：(A)(B)(C)(D)

解析：(A) $f(x)$的常數項爲$f(0)=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=21$

(B) $f(x)$的各項係數和爲$f(1)=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}=18$

(C) $f(x)$的各奇次項係數和爲 $\dfrac{f(1)-f(-1)}{2}=\dfrac{18-10}{2}=4$

(D) $f(x)$的各偶次項係數和爲 $\dfrac{f(1)+f(-1)}{2}=\dfrac{18+10}{2}=14$

(E) $f(x)=2(x^2-2)(x-1)+x(x+2)(3x^2-1)+(x^2-1)(x+1)(x-3)-2(x+2)(x-3)-x(x+1)(x-1)-(x^2-1)(x^2-2)(3x^2-1)$，　$f(x)$的領導係數爲 -3

2. 下列行列式何者爲 0？

(A) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 8 & 10 & 9 \\ 6 & -2 & 21 \end{vmatrix}$　(B) $\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix}$　(C) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$

(D) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$　(E) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$（但 a，b，c 爲互異正數）。

答案：　(A)(B)(C)

解析：

(A) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 8 & 10 & 9 \\ 6 & -2 & 21 \end{vmatrix}=2\times3\times\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 8 & 5 & 3 \\ 6 & -1 & 7 \end{vmatrix}=6\times\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 8 & 5 & 8 \\ 6 & -1 & 6 \end{vmatrix}=0$

$\times(-1)$

（第一行與第三行相同）

(B)$\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b-c & c-a \\ 0 & c-a & a-b \\ 0 & a-b & b-c \end{vmatrix} = 0$ （第一行全為 0）

(C) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

（第一列與第三列相同）

(D)

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4$ （第一行加到第二行及第三行）

(E)$\triangle = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = abc + abc + abc - c^3 - a^3 - b^3$

$= -(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) = -(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

$\because$ a，b，c為正數且均不相等 $\Rightarrow$ $\triangle \neq 0$

二、 填充題 (每題 10 分)

1. 空間中四點$A(1，0，-1)$，$B(2，1，3)$，$C(0，2，1)$，$D(3，2，0)$，則

(1)$\triangle ABC$的面積 ＝__________。

(2)則 $\overrightarrow{AB}$ ，$\overrightarrow{AC}$ ，$\overrightarrow{AD}$ 所張的平行六面體的體積$V=$__________。

答案： (1)$\frac{9}{2}$ (2) 21

解析：

$\overrightarrow{AB} = (1，1，4)$，$\overrightarrow{AC} = (-1，2，2)$，$\overrightarrow{AD} = (2，2，1)$

(1)$\triangle ABC = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}|(-6，-6，3)| = \frac{9}{2}$

(2) $V = |\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}| = 21$

2. 設$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 3$，$\begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix} = -1$，求$\begin{vmatrix} 3a & 3b \\ c+2e & d+2f \end{vmatrix} =$__________。

答案：3

解析：

$$\begin{vmatrix} 3a & 3b \\ c+2e & d+2f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3a & 3b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3a & 3b \\ 2e & 2f \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + 3\cdot 2\begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix} = 3\cdot 3 + 6(-1) = 3$$

3. 行列式$\begin{vmatrix} 554 & 427 & 327 \\ 586 & 443 & 343 \\ 711 & 504 & 404 \end{vmatrix}$之值 $=$ ______ 。

答案：4800

$$\begin{vmatrix} 554 & 427 & 327 \\ 586 & 443 & 343 \\ 711 & 514 & 404 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 127 & 100 & 327 \\ 143 & 100 & 343 \\ 207 & 100 & 404 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 127 & 100 & 327 \\ 16 & 0 & 16 \\ 64 & 0 & 61 \end{vmatrix}$$

$$= (-100)\times \begin{vmatrix} 16 & 16 \\ 64 & 61 \end{vmatrix} = -1600 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 64 & 61 \end{vmatrix} = -1600 \times (61-64) = 4800$$

4. 若三平面 $5x+y+2z=-1$，$5x-7y+x=-18$ 與 $3x-y+z=a$相交於一線，則$a=$ ______ 。

答案：-4

解析：

$$\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0 \Rightarrow a = -4$$

5. 若 $0° \le x \le 360°$，則凡得蒙行列式$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & \sin x & \sin^2 x \end{vmatrix} = 0$ 之解為__________。(三解)

答案：. $\frac{\pi}{6}$，$\frac{5\pi}{6}$，$\frac{3\pi}{2}$

解析：

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & \sin x & \sin^2 x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{4} \\ 0 & \sin x+1 & \sin^2 x-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{4} \\ \sin x+1 & \sin^2 x-1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{3}{2}\sin^2 x + \frac{3}{4}\sin x - \frac{3}{4} = \frac{3}{4}(2\sin^2 x + \sin x - 1)$$

$$= \frac{3}{4}(\sin x+1)(2\sin x-1) = 0，\quad \sin x = -1 \text{ 或 } \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{6}，\frac{5\pi}{6}，\frac{3\pi}{2}$$

6. 求$\begin{vmatrix} x+1 & 2 & 3 \\ 1 & x+2 & 3 \\ 1 & 2 & x+3 \end{vmatrix} = 0$ 之解為__________。(兩解)

答案：0，-6

解析：

$$\begin{vmatrix} x+1 & 2 & 3 \\ 1 & x+2 & 3 \\ 1 & 2 & x+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+6 & 2 & 3 \\ x+6 & x+2 & 3 \\ x+6 & 2 & x+3 \end{vmatrix} = x+6\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & x+2 & 3 \\ 1 & 2 & x+3 \end{vmatrix} \times(-1)$$

$$= x+6\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} = x^2(x+6)=0，\quad x=0，-6$$

7. 若相異三條直線L_1：$(1-k)x+2y+3=0$，L_2：$x+(2-k)y+3=0$，L_3：$x+2y+(3-k)=0$，恰有一個交點，則

(1) k之值 $=$______。(2)此交點坐標爲______。

答案：(1) 6　(2)(1，1)

解析：

∵　L_1，L_2，L_3三直線交於一點

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-k & 2 & 3 \\ 1 & 2-k & 3 \\ 1 & 2 & 3-k \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \begin{vmatrix} 6-k & 2 & 3 \\ 6-k & 2-k & 3 \\ 6-k & 2 & 3-k \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (6-k)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-k & 3 \\ 1 & 2 & 3-k \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -k & 0 \\ 1 & 0 & -k \end{vmatrix} = 0$$

$\times(-2)$　$\times(-3)$

$\Rightarrow (6-k)k^2=0 \quad \Rightarrow \quad k=0$ 或 6

∵　$k=0$ 時，$L_1=L_2=L_3$不合，故k之值 $=6$

當$k=6$ 時 $\Rightarrow \begin{cases} -5x+2y+3=0 \\ x-4y+3=0 \\ x+2y-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow$ 交點(1，1)

8. 因式分解 $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} =$______。

答案：$(a+b+c)^3$

解析：

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-b-c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & -b-c-a & 0 \\ 2c & 0 & -c-a-b \end{vmatrix}$$

$\times(-1)$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} a-b-c & 1 & 1 \\ 2b & -1 & 0 \\ 2c & 0 & -1 \end{vmatrix} = (a+b+c)^2(a-b-c+2c+2b) \quad = (a+b+c)^3$$

9. 求(1)三階行列式之值$\begin{vmatrix} 9 & -4 & 3 \\ -7 & 5 & 2 \\ 0 & 6 & -1 \end{vmatrix}=$ __________，

(2)不等式$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & (-9) \\ x^2 & 2^2 & (-9)^2 \end{vmatrix}>0$ 之解爲__________。

答案： (1)-251，(2) $-9<x<2$

解析：

(1)$\begin{vmatrix} 9 & -4 & 3 \\ -7 & 5 & 2 \\ 0 & 6 & -1 \end{vmatrix} = -45+0-126+0+28-108=-251$

(2)$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & (-9) \\ x^2 & 2^2 & (-9)^2 \end{vmatrix} > 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & -9 \\ x^2 & 4 & 81 \end{vmatrix} > 0$

$\Rightarrow \quad 162-9x^2+4x-2x^2-81x+36>0 \quad \Rightarrow \quad -11x^2-77x+198>0$

$\Rightarrow \quad x^2+7x-18<0 \quad \Rightarrow \quad (x-2)(x+9)<0 \quad \Rightarrow \quad -9<x<2$

10. 空間四點$A(a，1，-1)$，$B(a，1，0)$，$C(2，3，1)$，$D(a+2，0，4)$共平面，$a\in R$，則$a=$ __________。

答案：6

解析：

$\overrightarrow{AB}=(0，0，1)$，$\overrightarrow{AC}=(2-a，2，2)$，$\overrightarrow{AD}=(2，-1，5)$

$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2-a & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow \quad a=6$