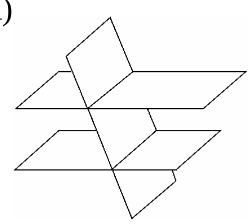
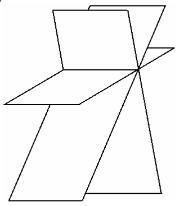
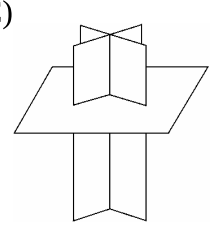
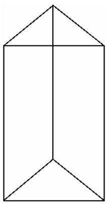
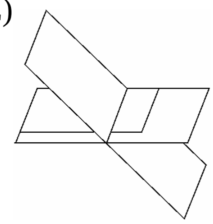
高雄市明誠中學 高二數學平時測驗　　日期：92.11.28					
範圍	3-1 一次方程組	班級		姓名	
		座號			

一、單選題 (共 8 分)

1. 方程組：$\begin{cases}3x-y-2z=-1\\ x-3y+2z=1\\ x+2y-3z=1\end{cases}$ 的圖形爲下列何者？

(A)

(B)

(C)


(D)

(E)


答案：(D)

解析：

x，y，z 之係數比皆不相等且無解 $\Rightarrow$ 三平面相異且兩兩不平行則三平面兩兩相交於一直線，且交線兩兩平行，故選(D)

2. $a\in R$，方程組 $\begin{cases}6x+(a-2)y-7a+17=0\\ (a+5)x-2y+8a+24=0\end{cases}$ 有無限多解，在所有解$(x，y)$中 $4x^2+y^2$的最小值爲？(A) 24　(B) 32　(C) 40　(D) 64　(E) 128

答案： (B)

解析：

方程組無限多解 $\Rightarrow$ $\dfrac{6}{a+5}=\dfrac{a-2}{-2}=\dfrac{-7a+17}{8a+24}$

$\Rightarrow\begin{cases}(a+5)(a-2)=-12\\ (a-2)(8a+24)=-2(-7a+17)\end{cases}$ $\Rightarrow\begin{cases}a^2+3a+2=0\\ 4a^2-3a-7=0\end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}(a+1)(a+2)=0\\ (4a-7)(a+1)=0\end{cases}$

$\therefore$ $a=-1$，此時，方程組爲$\begin{cases}6x-3y+24=0\\ 4x-2y+16=0\end{cases}$，其解爲$\begin{cases}x=t\\ y=2t+8\end{cases}$，$t\in R$

$\therefore$ $4x^2+y^2=4t^2+(2t+8)^2=8(t+2)^2+32$，所以，最小值 $=32$

二、 填充題 (共 10 分)

1. 有一工程，如甲、乙丙三人合作，10 天可完成；如乙、丙二人合作，15 天可完成；如甲作 15 天後餘下丙來作，丙再作 30 天才完成，問如乙獨做須__________天完成。。

答案： 20
解析：

設一工程甲獨作需 x 天，乙獨作需 y 天，丙獨作需 z 天完成

$$\therefore \quad \begin{cases} 10(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})=1 \\ 15(\frac{1}{y}+\frac{1}{z})=1 \\ \frac{15}{x}+\frac{30}{z}=1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{10} \cdots\cdots ① \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{15} \cdots\cdots ② \\ \frac{1}{x}+\frac{2}{z}=\frac{1}{15} \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

由① − ②得 $\frac{1}{x}=\frac{1}{30}$ $\Rightarrow$ $x=30$，代入③得 $\frac{1}{30}+\frac{2}{z}=\frac{1}{15}$

$\Rightarrow$ $z=60$ 代入②得 $\frac{1}{y}+\frac{1}{60}=\frac{1}{15}$ $\Rightarrow$ $y=20$，故乙獨作須 20 天完成

2. 甲，乙二人同解方程組 $\begin{cases} 2x-ay=3 \\ bx+y=7 \end{cases}$，若甲看錯 a 得解爲 $(2，-1)$，乙看錯 b 得解爲 $(1，-1)$，求 $(a，b)=$__________，又解 $(x，y)=$__________。

答案： $(1，4)$；$(\frac{5}{3}，\frac{1}{3})$

解析：

$$\begin{cases} 2x-ay=3 \cdots\cdots ① \\ bx+y=7 \cdots\cdots ② \end{cases}$$

甲看錯 a 得解 $(2，-1)$ 代入② $\Rightarrow$ $2b-1=7$ $\Rightarrow$ $b=4$

乙看錯 b 得解 $(1，-1)$ 代入① $\Rightarrow$ $2+a=3$ $\Rightarrow$ $a=1$

$\therefore$ $(a，b)=(1，4)$，原方程組 $\begin{cases} 2x-y=3 \\ 4x+y=7 \end{cases}$ 解得 $(x，y)=(\frac{5}{3}，\frac{1}{3})$

3. 若方程組 $\begin{cases} 2x+(3-a)y+a+5=0 \\ (3-a)x+2y+7-a=0 \end{cases}$ 無解，則常數 a 之值爲__________。

答案： 5

解析：

$\because$ 方程組無解， $\frac{2}{3-a}=\frac{3-a}{2}\neq\frac{a+5}{7-a}$

$\therefore$ $(a-3)^2=4$ $\Rightarrow$ $a=1$ 或 5，但 $\frac{3-a}{2}\neq\frac{a+5}{7-a}$ $\therefore$ 取 $a=5$

4. 設 $\begin{cases} ax+by=1 \\ x-y=4 \end{cases}$ 與 $\begin{cases} ax-by=1 \\ x+y=2 \end{cases}$ 爲同義方程組（解集合相同），則常數 $a+b$ 之值爲________。

答案： 0 或 $\frac{1}{3}$

解析：

(1)兩方程組的解集合都是 ϕ 時，$\dfrac{a}{1}=\dfrac{b}{-1}\neq\dfrac{1}{4}$ 且 $\dfrac{a}{1}=\dfrac{-b}{1}\neq\dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $a+b=0$

(2)兩方程組有公共解(α，β)時

$\therefore$ $\begin{cases}x-y=4\\x+y=2\end{cases}$ $\Rightarrow$ $x=3$，$y=-1$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}3a-b=1\\3a+b=1\end{cases}$ $\Rightarrow$ $a=\dfrac{1}{3}$，$b=0$

$\Rightarrow$ $a+b=\dfrac{1}{3}$

5. 設 x，y 的方程組 $\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$ 之解爲$(x$，$y)=(2$，$5)$，則方程組 $\begin{cases}5b_1x+2a_1y+3c_1=0\\5b_2x+2a_2y+3c_2=0\end{cases}$ 之解爲何？

答案：. $(-3$，$-3)$

解析：

$\therefore$ $\begin{cases}5b_1x+2a_1y+3c_1=0\\5b_2x+2a_2y+3c_2=0\end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}5b_1x+2a_1y=-3c_1\\5b_2x+2a_2y=-3c_2\end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}(-\dfrac{5}{3})b_1x+(-\dfrac{2}{3})a_1y=c_1\\(-\dfrac{5}{3})b_2x+(-\dfrac{2}{3})a_2y=c_2\end{cases}$

$\Rightarrow$ $\begin{cases}(-\dfrac{2}{3})a_1y+(-\dfrac{5}{3})b_1x=c_1\\(-\dfrac{2}{3})a_2y+(-\dfrac{5}{3})b_2x=c_2\end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}a_1(-\dfrac{2}{3}y)+b_1(-\dfrac{5}{3}x)=c_1\\a_2(-\dfrac{2}{3}y)+b_2(-\dfrac{5}{3}x)=c_2\end{cases}$

$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$ 的解爲$(x$，$y)=(2$，$5)\Rightarrow$ $\begin{cases}-\dfrac{2}{3}y=2\\-\dfrac{5}{3}x=5\end{cases}$ $\Rightarrow\begin{cases}x=-3\\y=-3\end{cases}$

6. 設 $9x-4y+3z=-7x+2y+15z=13x-8y-z$，$xyz\neq0$，求 $\dfrac{x+y+z}{x-y+z}=$__________。

答案：$\dfrac{3}{5}$

解析：

$\begin{cases}9x-4y+3z=-7x+2y+15z\\-7x+2y+15z=13x-8y-z\end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}8x-3y-6z=0\\10x-5y-8z=0\end{cases}$

$\Rightarrow$ $x:y:z=\begin{vmatrix}-3&-6\\-5&-8\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}-6&8\\-8&10\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}8&-3\\10&-5\end{vmatrix}$

$=(-6):4:(-10)=3:(-2):5$，

$\therefore$ 令 $x=3t$，$y=-2t$，$z=5t$，則 $\dfrac{x+y+z}{x-y+z}=\dfrac{3t-2t+5t}{3t+2t+5t}=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$

7. 若k為實數且方程組$\begin{cases} x-2y-3z=1 \\ x+2y+z=-1 \\ 3x+2y-z=k \end{cases}$有解，則$k$之值=__________。

答案：-1

解析：

將方程組的增廣矩陣作列運算：

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & k \end{bmatrix} \xrightarrow[(-3)R_1+R_3]{(-1)R_1+R_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -2 \\ 0 & 8 & 8 & k-3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-2)R_2-R_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & k+1 \end{bmatrix}$$

由第三列知，方程式 $0\cdot x+0\cdot y+0\cdot z=(k+1)$， $k=-1$，方程式有解

8. $\begin{cases} \dfrac{2}{3x-y}-\dfrac{4}{2x+y}=1 \\ \dfrac{5}{3x-y}+\dfrac{8}{2x+y}=7 \end{cases}$ 之解$(x，y)=$__________。

答案：$(1，2)$

解析：

令$\dfrac{1}{3x-y}=A$，$\dfrac{1}{2x+y}=B$，則$\begin{cases} 2A-4B=1 \\ 5A+8B=7 \end{cases}$

$\therefore$ $A=1$，$B=\dfrac{1}{4}$，故$\begin{cases} 3x-y=1 \\ 2x+y=4 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $x=1$，$y=2$

9. 方程組$\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{yz}{y+z}=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{zx}{z+x}=\dfrac{1}{3} \end{cases}$的解為__________

答案：$(1，1，\dfrac{1}{2})$

解析：

兩邊倒數，原式化為$\begin{cases} \dfrac{x+y}{xy}=2 \\ \dfrac{y+z}{yz}=3 \\ \dfrac{z+x}{zx}=3 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=2 \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=3 \\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}=3 \end{cases}$

①+②+③得 $2(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})=8 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=4 \cdots\cdots$④

由④－① $\Rightarrow \quad \frac{1}{z}=2 \quad \Rightarrow \quad z=\frac{1}{2}$

④－② $\Rightarrow \quad \frac{1}{x}=1 \quad \Rightarrow \quad x=1$

④－③ $\Rightarrow \quad \frac{1}{y}=1 \quad \Rightarrow \quad y=1$

10. 矩陣A是一個 2×3 矩陣，且A的第i列第j行的元為$a_{ij}=2i-j$，其中$i=1$，$j=1$，2，3，試寫出矩陣$A=$ ____________

答案：$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

解析：

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2\times1-1 & 2\times1-2 & 2\times1-3 \\ 2\times2-1 & 2\times2-2 & 2\times2-3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

11. 解方程組：$\begin{cases} 6(x+y)=5xy \\ 2(y+z)=3yz \\ 3(z+x)=4zx \end{cases}$

答案：$(x，y，z)=(0，0，0)，(3，2，1)$

解析：

$$\begin{cases} 6(x+y)=5xy \ \cdots\cdots ① \\ 2(y+z)=3yz \ \cdots\cdots ② \\ 3(z+x)=4zx \ \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

(1)若 $x=0$ 代入①，③得 $y=0$，$z=0$，∴ $(x，y，z)=(0，0，0)$為其解

(2)若 $xyz\neq 0$，則①，②，③分別除以 xy，yz，zx 得

$$\begin{cases} \frac{6}{x}+\frac{6}{y}=5 \\ \frac{2}{y}+\frac{2}{z}=3 \\ \frac{3}{z}+\frac{3}{x}=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6} \ \cdots\cdots ④ \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{2} \ \cdots\cdots ⑤ \\ \frac{1}{z}+\frac{1}{x}=\frac{4}{3} \ \cdots\cdots ⑥ \end{cases}$$

[④＋⑤＋⑥]$\div 2$ 得 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{11}{6}\cdots\cdots$⑦

⑦－⑤，⑦－⑥，⑦－④得 $\frac{1}{x}=\frac{11}{6}-\frac{3}{2}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$\frac{1}{y}=\frac{11}{6}-\frac{4}{3}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，$\frac{1}{z}=\frac{11}{6}-\frac{5}{6}=\frac{6}{6}=1$

∴ $x=3$，$y=2$，$z=1$