高雄市明誠中學　高二數學平時測驗　　日期：92.11.21					
範圍	空間直線方程式	班級		姓名	
		座號			

一、單選題 (共 8 分)

1. 已知點 $A(-1，m，n)$在直線 L： $\dfrac{x+81}{8}=\dfrac{y+108}{11}=\dfrac{z-127}{-13}$ 上，則實數序對$(m，n)=$

   (A)(2，－3)　(B)(2，3)　(C)(－2，3)　(D)(－4，3)　(E)(5，－8)。

Ans： (A)

解析：

$\because\ A(-1，m，n)\in L\quad \therefore\ \dfrac{80}{8}=\dfrac{m+108}{11}=\dfrac{n-127}{-13}$

$\Rightarrow \begin{cases} m+108=110 \\ n-127=-130 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ n=-3 \end{cases}$

2. 下列那一直線與平面 $2x+y+z-4=0$ 平行？(複選)

   (A) $\dfrac{x+5}{1}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z+8}{1}$　(B) $\dfrac{x+5}{-1}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z+8}{1}$

   (C) $\dfrac{x+5}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+5}{-1}$　(D) $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z-1}{-1}$　(E) $\begin{cases} 2x-y+z=0 \\ 2x+2y+z=5 \end{cases}$

Ans： (B)(D)(E)

解析：平面 $2x+y+z-4=0$ 的法向量 $\vec{n}=(2，1，1)$

(1) $\because\ \dfrac{x+5}{1}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z+8}{1}$ 的方向向量 $\vec{u_1}=(1，1，1)$，且 $\vec{n}\cdot\vec{u_1}=2\cdot1+1+1=4\neq0$

$\therefore$ 直線與平面不平行 $\Rightarrow$ (A)不真

(2) $\because\ \dfrac{x+5}{-1}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z+8}{1}$ 的方向向量 $\vec{u_2}=(-1，1，1)$，且 $\vec{n}\cdot\vec{u_2}=-2+1+1=0$

$\therefore$ 直線與平面平行 $\Rightarrow$ (B)真

(3) $\because\ \dfrac{x+5}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+5}{-1}$ 的方向向量 $\vec{u_3}=(1，1，-1)$，且 $\vec{n}\cdot\vec{u_3}=2+1-1=2\neq0$

$\therefore$ 直線與平面不平行 $\Rightarrow$ (C)不真

(4) $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z-1}{-1}$ 的方向向量 $\vec{u_4}=(1，-1，-1)$，且 $\vec{n}\cdot\vec{u_4}=2-1-1=0$

$\therefore$ 直線與平面平行 $\Rightarrow$ (D)真

(5) $\begin{cases} 2x-y+z=0 \\ 2x+2y+z=5 \end{cases}$ 的方向向量 $\vec{u_5}=\left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\right)=(-3，0，6)$，且

$\vec{n}\cdot\vec{u_5}=-6+0-6=0\quad\therefore$ 直線與平面平行 $\Rightarrow$ (E)真

二、 填充題 (共 10 分)

1. 點$A(11，4，-6)$到直線L：$\begin{cases} x=4-t \\ y=7+2t \\ z=-1+t \end{cases}$，$t\in R$的距離為__________。

Ans： $\sqrt{29}$

解析：取$P(4-t，7+2t，-1+t)\in L$

$\because$ $\overline{AP}^{\,2}=(t+7)^2+(-3-2t)^2+(-5-t)^2=6t^2+36t+83$

$=6(t^2+6t)+83=6(t+3)^2+29\geq 29$

$\therefore$ $\overline{AP}\geq\sqrt{29}$ $\therefore$ 點A到直線L的距離為$\sqrt{29}$，此時，A在L的垂足為$(7，1，-4)$

2. 兩直線L_1：$\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{3}$與$L_2$：$\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{6}$間的距離為__________。

Ans： $\dfrac{6}{7}\sqrt{35}$

解析：取L_2上一點$P(-1,2,3)$，參閱題 1.，$d(L_1,L_2)=d(P,L_1)=\dfrac{6}{7}\sqrt{35}$

3. 設直線L：$\begin{cases} 2x-y+z=3 \\ x-2y+2z=2 \end{cases}$，試求包含直線$L$及點$P(-1，2，3)$之平面方程式 $=$ ________。

Ans：. $2x-7y+7z-5=0$

解析：

設此平面方程式為 $2x-y+z-3+k(x-2y+2z-2)=0$；又過 $P(-1，2，3)$

則$(-2-2+3-3)+k(-1-4+6-2)=0$ $\Rightarrow$ $k=-4$

$\therefore$ 平面方程式為 $2x-y+z-3-4(x-2y+2z-2)=0$，即 $2x-7y+7z-5=0$

4. 包含直線L：$\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{4}$的平面$E$，若與平面$F$：$2x-y+3z+7=0$ 垂直，則其方程式為__________。

Ans：. $10x-y-7z+25=0$

解析：

設平面 E，F 的法線向量各為$\overrightarrow{n_E}$，$\overrightarrow{n_F}$，且$\overrightarrow{n_F}=(2，-1，3)$

$\because$ $E\perp F$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{n_E}\perp\overrightarrow{n_F}$

$\because$ $L\subset E$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{n_E}\perp L$，$L$ 的方向向量為$\overrightarrow{l_L}=(3，2，4)$

$$\left|\begin{array}{cccccc} 2 & -1 & 3 & 2 & -1 & 3 \\ & \times & \times & \times & & \\ 3 & 2 & 4 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right|$$

$\therefore$ $\overrightarrow{n_F}$，L 的公垂向量$\overrightarrow{n_E}=\overrightarrow{n_F}\times\overrightarrow{l_L}=(10，-1，-7)$，

$\because$ 取點$(-1，1，2)\in E$， E：$10x-y-7z=-25$

5. 空間二歪斜線L_1：$\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$；$L_2$：$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-4}{-1}$，

(1)包含L_2且與L_1平行的平面方程式為＿＿＿＿＿。

(2) L_1，L_2的距離 ＝＿＿＿＿＿。

Ans： (1) $y+2z=8$；(2) $\sqrt{5}$

解析：

L_1：$\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$的方向向量$\overrightarrow{v_1}=(2,-2,1)$

L_2：$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-4}{-1}$的方向向量$\overrightarrow{v_2}=(1,2,-1)$

(1)包含L_2且平行L_1的平面E的法線向量$\vec{n}$，又$\vec{n}\perp\overrightarrow{v_1}$，$\vec{n}\perp\overrightarrow{v_2}$

$$\vec{n}=\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}=\left(\begin{vmatrix}-2&1\\2&-1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&-2\\1&2\end{vmatrix}\right)=(0,2,4)=2(0,1,2)$$

L_2上一點(0，0，4)在平面E上，E的方程式為

$0(x-0)+1\cdot(y-0)+2(z-4)=0$， 即$y+2z=8$

(2) L_1，L_2的距離 ＝L_1上一點(3，－1，2)到平面E的距離

$$=\frac{|3\times0+1\times(-1)+2\times2-8|}{\sqrt{0+1+4}}=\frac{|-5|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

6. 直線L_1：$\dfrac{x-11}{4}=\dfrac{y+5}{-3}=\dfrac{z+7}{-1}$，$L_2$：$\dfrac{x+5}{3}=\dfrac{y-4}{-4}=\dfrac{z-6}{-2}$不共平面，則

(1)其公垂線L與直線L_1的交點為＿＿＿＿＿

(2) L_1，L_2的公垂線段長為＿＿＿＿＿。

Ans： (1) $2x+5y-7z+32=0$ (2)(3，1，－5) (3) $\sqrt{78}$

解析：

(1)設公垂線L與直線L_1的交點為P，與直線L_2的交點為Q

L_1：$P(4t+11,-3t-5,-7-t)$，$\overrightarrow{n_1}=(4,-3,-1)$

L_2：$Q(3s-5,-4s+4,-2s+6)$，$\overrightarrow{n_2}=(3,-4,-2)$

$\overrightarrow{PQ}=(3s-4t-16,-4s+3t+9,-2s+t+13)$

$$\Rightarrow\begin{cases}4(3s-4t-16)-3(-4s+3t+9)-(-2s+t+13+=0\\3(3s-4t-16)-4(-4s+3t+9)-2(-2s+t+13+=0\end{cases}\Rightarrow s=2，t=-2$$

代入得$P(4(-2)+11,-3(-2)-5,-7-(-2))=(3,1,-5)$

(2) $\overrightarrow{PQ}=(-2,-5,7)$，公垂線段$\overline{PQ}=|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{(-2)^2+(-5)^2+7^2}=\sqrt{78}$

7. 設點$P(-5,0,-8)$及直線L：$\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{2}$

(1)自P作L的垂直線，若垂足為Q，則Q點的坐標為＿＿＿＿＿，P關於L之對稱點P'坐標為＿＿＿＿＿。。

(2) P點到直線L的距離為＿＿＿＿＿。

Ans：. (1)(1，6，－5) (2) (7，12，－2) (3) 9

解析：

$\because$ 直線 L：$\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{2}$，$\therefore$ 直線 L 的參數方程式為$\begin{cases} x=3+t \\ y=2-2t \\ z=-1+2t \end{cases}$，$t\in R$

(1)$\because$ $P(-5，0，-8)$在 L 上的垂足為 Q $\therefore$ $\overrightarrow{PQ}\perp L$

$\because$ Q 在 L 上， 設 $Q(3+t，2-2t，-1+2t)$，則$\overrightarrow{PQ}=(t+8，2-2t，2t+7)$

$\because$ L 的方向向量$\vec{\ell}=(1，-2，2)$，且 $\overrightarrow{PQ}\perp\vec{\ell}$

$\therefore$ $(t+8，2-2t，2t+7)\cdot(1，-2，2)=0\Rightarrow$ $(t+8)-2(2-2t)+2(2t+7)=0$

$\Rightarrow$ $9t+18=0$ $\therefore$ $t=-2$，故 Q 點坐標為$(1，6，-5)$，

(2)點 P 到直線 L 的最短距離，即為 $\overline{PQ}$ 之長

$\therefore$ $d(P，L)=\overline{PQ}=\sqrt{(1+5)^2+(6-0)^2+(-5+8)^2}=\sqrt{81}=9$

$\overline{PP'}$中點 $Q\Rightarrow P'(7，12，-2)$

8. 直線L過$P(2，4，3)$且平行於$A(2，1，0)$，$B(3，4，2)$兩點之連線，求L的對稱比例式____________________。

Ans： $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{z-3}{2}$

解析：

$\because$ $\overrightarrow{AB}=(1，3，2)$為 L 之方向向量且 L 又過 $P(2，4，3)$

$\therefore$ L 的對稱比例式為$\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{z-3}{2}$

9. 過點 $A(1，2，-3)$且平行於 y 軸的直線方程式為何？____________________

Ans：. $\begin{cases} x=1 \\ y=2+t \\ z=-3 \end{cases}$，$t\in R$

解析：y 軸的方向向量為$(0，1，0)$，又過 $A(1，2，-3)$，則此直線方程式：$\begin{cases} x=1 \\ y=2+t \\ z=-3 \end{cases}$，$t\in R$

10. 過點$A(1，0，2)$且垂直於直線$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{1}$之平面方程式為__________

Ans： $2x+2y+z=4$

解析：

平面 E 垂直直線$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{1}$，$\Rightarrow$ E 的法線向量為$(2，2，1)$，

$A(1，0，2)$在 E 上，E 之方程式為 $2(x-1)+2(y-0)+1\cdot(z-2)=0$，得 $2x+2y+z=4$

11. 試求包含兩平行直線L_1：$\dfrac{x}{3}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{2}$，$L_2$：$\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+3}{2}$之平面方程式__________

。

Ans： $x+13y+5z+13=0$

解析：

取L_1上一點$P(0，-1，0)$，L_2上一點$Q(2，0，-3)$ ⇒ $\overrightarrow{PQ}=(2，1，-3)$

兩平行直線之方向向量$\vec{\ell}_1=\vec{\ell}_2=(3，-1，2)$，則$\vec{\ell}_1$，$\vec{\ell}_2$公垂向量$\vec{\ell}_1\times\overrightarrow{PQ}=(1，13，5)$

∴　包含L_1，L_2之平面方程式爲$x+13y+5z+13=0$

12. 試求包含$A(4，3，1)$及直線$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{2}$之平面方程式爲__________。

Ans：. $2x-6y+z+9=0$

解析：

取直線 L 上一點 $P(1，2，1)$　∴　$\overrightarrow{PA}=(3，1，0)$

直線 L 之方向向量$\vec{\ell}=(2，1，2)$　⇒　$\overrightarrow{PA}\times\vec{\ell}=(2，-6，1)$

∴　包含 A 點及直線 L 之平面方程式爲 $2x-6y+z+9=0$

13. 三直線L：$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{5}=\dfrac{z+4}{3}$，$M$：$\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z+4}{-1}$，$N$：$\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y-a}{2}=\dfrac{z-b}{1}$相交於一點，則數對$(a，b)=$__________。

Ans： $(5，-3)$

解析：

L、M、N 相交於一點$(1，3，-4)$，所以$(4+3t，a+2t，b+t)=(1，3，4)$

⇒　$t=-1，a=5，b=-3$

14. 原點在直線L：$\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-5}{1}$上投影的坐標爲________________，對稱點坐標爲________________。

Ans： $(1，-3，4)$；$(2，-6，8)$

解析：

設原點 O 在 L：$\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-5}{1}$上的投影 $A(3+2t，-1+2t，5+t)$

則$\overline{OA}\perp L$　⇒　$\overrightarrow{OA}\perp(2，2，1)$

⇒　$(2，2，1)\cdot(3+2t，-1+2t，5+t)=0$

⇒　$2(3+2t)+2(-1+2t)+(5+t)=0$　⇒　$t=-1$

∴　$A(1，-3，4)$，設 O 的對稱點 B　⇒　A 爲$\overline{OB}$中點　∴　$B(2，-6，8)$　（$\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OA}$）

14. 設L：$\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-1}{5}=\dfrac{z+3}{1}$與$\dfrac{x-k}{2}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z+k}{1}$兩直線相交於一點，若平面$E$包含$L$及$M$，則(1)平面$E$方程式爲__________。(2)$k=$__________。

Ans： (1)$x-y+z=-1$　　(2)1

解析：

L 之方向向量 $\overrightarrow{\ell_1}=(4，5，1)$，$M$ 之方向向量 $\overrightarrow{\ell_2}=(2，3，1)$，$\overrightarrow{\ell_1}\times\overrightarrow{\ell_2}=(2，-2，2)$

設 E：$x-y+z=a$，又 L 上一點 $(3，1，-3)$ 在 E 上

$\therefore\ \ a=3-1-3=-1$，故平面 E 為 $x-y+z=-1$

設 $P(x，y，z)$ 在 L、M 上，$\begin{cases} x=3+4t=k+2s\cdots\cdots① \\ y=1+5t=k+3s\cdots\cdots② \\ z=-3+t=-k+s\cdots\cdots③ \end{cases}$

②－①得 $s=t-2$……④代入①得 $k=2t+7$……⑤

④、⑤代入③得 $t=-3$ 代入⑤得 $k=1$　$\therefore\ \ P(-9，-14，-6)$