高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：92.11.13					
範圍	平面方程式	班級		姓名	
		座號			

一、單選題 (共 8 分)

1. 兩平面 $2x - y - 2z + 1 = 0$，$4x - 2y - 4z = 5$ 的距離為

(A) 6　(B) $\frac{7}{6}$　(C) 3　(D) 2　(E) $\frac{1}{2}$ 。

Ans：.(B)

解析：

∵　兩平行平面 $ax + by + cz + d = 0$，$ax + by + cz + e = 0$ 距離為 $\frac{|d-e|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

∴　$2x - y - 2z + 1 = 0$，$4x - 2y - 4z = 5$ 的距離，

即 $2x - y - 2z + 1 = 0$，$2x - y - 2z - \frac{5}{2} = 0$ 的距離　$\frac{1+\frac{5}{2}}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{7}{6}$

2. 兩平面E_1：$x - y + z = 8$，E_2：$x + y + \sqrt{6}z = 5$ 的銳夾角θ 為

(A) $\frac{\pi}{6}$　(B) $\frac{\pi}{4}$　(C) $\frac{\pi}{3}$　(D) $\frac{5\pi}{12}$　(E) $\frac{4\pi}{9}$ 。

Ans： (C)

解析：

取平面E_1的法線向量 $\overrightarrow{n_1} = (1，-1，1)$，$E_2$的法線向量為 $\overrightarrow{n_2} = (1，1，\sqrt{6})$

∵　E_1，E_2的銳夾角為θ　⇒　$\pm\overrightarrow{n_1}$ ，$\overrightarrow{n_2}$ 的銳夾角為θ

⇒　$\cos\theta = \left|\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}\right| = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{8}} = \frac{1}{2}$　⇒　$\theta = 60° = \frac{\pi}{3}$

二、 填充題 (共 10 分)

1. 平面E過點$A(1，1，-1)$且與平面E_1：$x - y + z + 5 = 0$，E_2：$x + 2y - z = 8$ 都垂直，則E的方程式為__________ 。

Ans： $x - 2y - 3z = 2$

解析：

設平面E，E_1，E_2的法線向量各為$\vec{n}$，$\overrightarrow{n_1}$ ，$\overrightarrow{n_2}$

∵　$E \perp E_1$　⇒　$\vec{n} \perp \overrightarrow{n_1}$ ，　∵　$E \perp E_2$　⇒　$\vec{n} \perp \overrightarrow{n_2}$

∴　$\vec{n}$ 為 $\overrightarrow{n_1}$，$\overrightarrow{n_2}$ 的公垂向量 $\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right) = (-1, 2, 3)$

由 $\overrightarrow{n_1} = (1，-1，1)$，$\overrightarrow{n_2} = (1，2，-1)$　⇒　取$\vec{n} = (1，-2，-3)$

又$A(1，1，-1) \in E$　∴　E：$1\cdot(x-1) - 2(y-1) - 3(z+1) = 0 \Rightarrow x - 2y - 3z = 2$

2. 過點$A(-2，1，1)$，$B(1，1，3)$的平面E，若與平面F：$x - 2y + 3z = 5$ 垂直，則E的方程

式為__________。

Ans：$4x-7y-6z+21=0$

解析：

設平面 E，F 的法線向量各為 $\overrightarrow{n_1}$，$\overrightarrow{n_2}$

$\because$ $E\perp F$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n_2}$

又 A，$B\in E$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{AB}$

$\therefore$ $\overrightarrow{n_1}$ 為 $\overrightarrow{n_2}$，$\overrightarrow{AB}$ 的公垂向量，由 $\overrightarrow{n_2}=(1，-2，3)$，$\overrightarrow{AB}=(3，0，2)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{n_1}=\overrightarrow{n_2}\times\overrightarrow{AB}=\left(\begin{vmatrix}-2&3\\0&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3&1\\2&3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&-2\\3&0\end{vmatrix}\right)=(-4,7,6)=-(4,-7,-6)$$

$\therefore$ E：$4\cdot(x+2)-7(y-1)-6(z-1)=0\Rightarrow 4x-7y-6z+21=0$

3. 垂直於E_1：$x-y+2z+3=0$，E_2：$2x+y+3z+5=0$，且過點$A(2，3，2)$之平面方程式 = 。

Ans：$5x-y-3z-1=0$

解析：

$\overrightarrow{n_1}=(1，-1，2)$，$\overrightarrow{n_2}=(2，1，3)\Rightarrow$ $\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=(-5，1，3)$

E：$5(x-2)-(y-3)-3(z-2)=0$ $\Rightarrow$ $5x-y-3z-1=0$

4. 空間中四點 $A(1，1，2)$，$B(-1，0，3)$，$C(2，0，-1)$，$D(3，k，1)$

(1)過 A，B，C 三點的平面方程式為　　　　　　。

(2)若 A，B，C，D 四點共平面，則 $k=$　　　　　　。

Ans：(1) $4x-5y+3z-5=0$　　(2) 2

解析：

(1) $\overrightarrow{AB}=(-2，-1，1)$，$\overrightarrow{AC}=(1，-1，-3)\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(4，-5，3)$

$\therefore$ 平面 ABC 方程式為 $4(x-2)-5(y-0)+3(z+1)=0$ $\Rightarrow 4x-5y+3z-5=0$

(2) A，B，C，D 共平面 $\Rightarrow$ $D(3，k，1)$在平面 ABC 上

$\therefore$ $12-5k+3-5=0$ $\Rightarrow$ $k=2$

5. 設三平面E_1：$2x+y-4=0$，E_2：$y+2z=0$，E_3：$3x+2y+3z=6$，若平面E過E_1與E_2之交線，且與平面E_3垂直，則平面E的方程式為　　　　　　。

Ans：.$x-z-2=0$

解析：

$\because$ 平面E過平面E_1與E_2的交線

$\therefore$ 令平面E的方程式為$(2x+y-4)+k(y+2z)=0\Rightarrow$ $2x+(1+k)y+2kz-4=0$

$\because$ E與E_3：$3x+2y+3z=6$ 垂直，其法向量內積為 0

$\therefore$ $(2，1+k，2k)\cdot(3，2，3)=0$

$\Rightarrow$ $6+2(1+k)+6k=0$ $\Rightarrow$ $k=-1$

故平面E的方程式為 $2x-2z-4=0$，即$x-z-2=0$

6. 設一平面E平行平面 $2x+y+2z-1=0$ 且與三坐標平面所成四面體之體積為 9，則此平面E的方程式為__________。（四面體體積 $=\frac{1}{3}\times$底面積$\times$高）

Ans：$2x+y+2z=\pm 6$

解析：

$\because$ 平面E與平面 $2x+y+2z-1=0$ 平行

$\therefore$ 設E為 $2x+y+2z=k$，則平面E與三軸交於 $A(\frac{k}{2},0,0),B(0,k,0),C(0,0,\frac{k}{2})$

$\because$ E與三坐標平面所圍成的四面體體積

$V=\frac{1}{3}\cdot\Delta OAB\cdot\overline{OC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot|\frac{k}{2}\cdot k|\cdot|\frac{k}{2}|=\frac{1}{24}|k^3|$

$\therefore$ $\frac{1}{24}|k|^3=9 \Rightarrow |k|^3=6^3$ $\therefore$ $|k|=6 \Rightarrow k=\pm 6$

故平面E的方程式為 $2x+y+2z=\pm 6$

7. 包含兩點$A(1，1，3)$，$B(-2，1，1)$，且與平面E：$x-2y+3z=6$ 垂直的平面方程式為_。

Ans：.$4x-7y-6z+21=0$

解析：

$A(1，1，3)$，$B(-2，1，1) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(-3，0，-2)$，$\overline{n_E}=(1，-2，3)$

設包含 A，B 且與平面 E：$x-2y+3z=6$ 垂直的平面的法向量$\vec{n}$，則$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\perp\vec{n}\\ \overline{n_E}\perp\vec{n}\end{cases}$

$\Rightarrow \vec{n}=\overline{AB}\times\overline{n_E}=(\begin{vmatrix}0&-2\\-2&3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-2&-3\\3&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-3&0\\1&-2\end{vmatrix})=(-4，7，6)$

又 $A(1，1，3)$在平面 E 上，故所求平面方程式由點向式得

$4(x-1)-7(y-1)-6(z-3)=0$ 即 $4x-7y-6z+21=0$

8. 設x，y，z為實數，若$x+4y-5z+15=0$，則$\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2+(z+4)^2}$之最小值為___。

Ans：$\sqrt{42}$

解析：

令 E：$x+4y-5z+15=0$，$P(x，y，z)$為平面上任意點，$A(-1，2，-4)$

則$\overline{PA}=\sqrt{(x+1)^2+(y-2)+(z+4)^2}$

$\therefore$ $\overline{PA}$的最小值就是 A 點到平面 E 的距離 d，而 $d=\frac{|-1+8+20+15|}{\sqrt{1+16+25}}=\frac{42}{\sqrt{42}}=\sqrt{42}$

9. 空間三點$A(1，0，1)$，$B(0，1，2)$，$C(2，-1，3)$，平面E：$x+y-2z+4=0$

(1)△ABC的面積為__________。

(2)設平面ABC與平面E的夾角為θ，則$\cos\theta=$__________。

(3)△ABC在平面E上的正射影的面積爲__________。

Ans：(1)$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　(2)$\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　(3)$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

解析：

∵　$A(1，0，1)$，$B(0，1，2)$，$C(2，-1，3)$

∴　$\overrightarrow{AB}=(-1，1，1)$，$\overrightarrow{AC}=(1，-1，2)$

⇒　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-1-1+2=0$

⇒　$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\left(\begin{vmatrix}1&1\\-1&2\end{vmatrix}，\begin{vmatrix}1&-1\\2&1\end{vmatrix}，\begin{vmatrix}-1&1\\1&-1\end{vmatrix}\right)=(3，3，0)=3(1，1，0)$

(1)△ABC 的面積 $=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{3\times6-0}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

(2)平面 ABC 的法向量$\vec{u}\,//(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})$，取$\vec{u}=(1，1，0)$

E 的一個法向量$\vec{v}=(1，1，-2)$，則

$\cos\theta=\pm\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\pm\dfrac{1+1+0}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(3)△ABC 在平面 E 上正射影的面積 $=(\triangle ABC\text{ 之面積})|\cos\theta|=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

10. 通過點$(1，0，2)$且與x軸垂直的平面方程式爲__________。

Ans：.$x=1$

解析：

∵　垂直 x 軸的平面法向量$\vec{n}=(1，0，0)$，即 x 軸之方向向量

∴　平面方程式爲 $1\cdot(x-1)+0(y-0)+0(z-2)$　⇒　$x-1=0$

11. 在空間中，設點$A(1，2，3)$，平面$E：x-2y+3z=4$，點A在平面E上的正射影M的坐標爲__________；又點A對於平面E的對稱點A'的坐標爲__________。

Ans：.(1) $M(\dfrac{6}{7}，\dfrac{16}{7}，\dfrac{18}{7})$　(2) $A'(\dfrac{5}{7}，\dfrac{18}{7}，\dfrac{15}{7})$

解析：

設 $A(1，2，3)$在 E 上的投影點 M，A 對於 E 的對稱點 $A'(1+t，2-2t，3+3t)$

(1)∵　投影點 M 爲 $\overline{AA'}$ 中點且在平面 E 上，又 $M(1+\dfrac{t}{2}，2-t，3+\dfrac{3}{2}t)$在 E 上

∴　$(1+\dfrac{t}{2})-2(2-t)+3(3+\dfrac{3}{2}t)=4$ ⇒　$7t+2=0$

∴　$t=-\dfrac{2}{7}$　⇒ $M(\dfrac{6}{7}，\dfrac{16}{7}，\dfrac{18}{7})$

(2)∵　A'爲 A 對於平面 E 的對稱點　∴　$t=-\dfrac{2}{7}$　⇒ $A'(\dfrac{5}{7}，\dfrac{18}{7}，\dfrac{15}{7})$

12. 空間中含$A(1，0，0)$，$B(0，1，0)$，$C(0，0，1)$之平面方程式爲__________。

Ans：.$x+y+z=1$

解析：　用截距式得$\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{1}+\dfrac{z}{1}=1$，即$x+y+z=1$

13、. $A(1,3,2)$在平面E上之投影點爲$B(2,1,0)$，則$C(3,5,1)$ 到平面E的距離爲__________。

Ans：.3

解析：

$\overrightarrow{AB}=(1,-2,-2)$，所以$\overrightarrow{AB}=\vec{n}$ $\Rightarrow$ E：$(x-2)-2(y-1)-2z=0\Rightarrow$ $x-2y-2z=0$

故 $d(C,E)=\dfrac{|3-10-2|}{\sqrt{1+4+4}}=3$

14. 設E：$x-y+z=3$，F：$x+y+z=7$，兩平面夾角爲θ，則$\sin\theta=$__________。

Ans：$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

解析：

E 法向量 $\overrightarrow{n_1}=(1,-1,1)$，$F$ 法向量 $\overrightarrow{n_2}=(1,1,1)\Rightarrow$ $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=1$

$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{1}{3}$ $\Rightarrow\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-(\dfrac{1}{3})^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

15. 空間中，設$A(3,1,-2)$，$B(2,7,0)$，$C(-4,-1,1)$，

(1)△ABC之重心坐標爲__________。

(2)內積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$__________。

(3)外積 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=$__________。

(4)△ABC的面積爲__________。

(5)線段$\overline{AB}$的垂直平分面方程式爲__________。

(6)通過A，B，C三點的平面方程式爲__________。

Ans：(1) $(\dfrac{1}{3},\dfrac{7}{3},-\dfrac{1}{3})$　(2) 1　(3) $(22,-11,44)$　(4) $\dfrac{11}{2}\sqrt{21}$　(5) $2x-12y-4z+39=0$

(6) $2x-y+4z+3=0$

解析：

(1) $G(\dfrac{3+2-4}{3},\dfrac{1+7-1}{3},\dfrac{-2+0+1}{3})$，故△$ABC$之重心坐標爲$(\dfrac{1}{3},\dfrac{7}{3},-\dfrac{1}{3})$

(2) $\overrightarrow{AB}=(-1,6,2)$，$\overrightarrow{AC}=(-7,-2,3)$，$\overrightarrow{BC}=(-6,-8,1)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-1)\times(-7)+6\times(-2)+2\times3=1$

(3) $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(22,-11,44)$

$$\begin{array}{cccc} 6 & 2 & -1 & 6 \\ -2 & 3 & -7 & -2 \\ \hline & 22 \quad -11 & 44 & \end{array}$$

(4)$\triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2\cdot|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{41\cdot 62-1}=\frac{11\sqrt{21}}{2}$

(5)線段$\overline{AB}$的垂直平分面π 之法向量爲$\overrightarrow{AB}=(-1，6，2)$

又過$\overline{AB}$之中點$M(\frac{5}{2}，4，-1)$，平面 $\pi:-(x-\frac{5}{2})+6(y-6)+2(z-2)=0$

$\therefore\ \pi：2x-12y-4z+39=0$

(6)通過A，B，C三點的平面δ之法向量爲$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=11(2，-1，4)$

B點在平面δ上 $\Rightarrow 2(x-2)-(y-7)+4(z-0)=0$ $\therefore\ \delta：2x-y+4z+3=0$