

範圍	2-1	班級		姓名	得分
		座號			

※每題十分

1. 試敘述三垂直線定理；並證明之。

「敘述」：

$\overline{AB} \perp$ 平面 E 於 B ，直線 $L \in E$ ， $\overline{BC} \perp L$ 於 C ，則 $\overline{AC} \perp L$

「證明」：

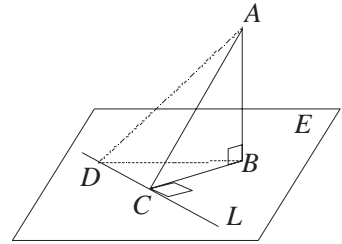
於直線 L 上取一點 $D \neq C$ ，連接 \overline{AD} , \overline{BD} ，

$$\because \overline{AB} \perp \overline{BC} \Rightarrow \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$$

$$\text{又 } \overline{BC} \perp L \text{ 於 } C \Rightarrow \overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2$$

$$\because \overline{AB} \perp \text{平面 } E \text{ 於 } B \Rightarrow \overline{AB} \perp \overline{BD} \text{，故}$$

$$\begin{aligned} \overline{AD}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 \\ &= (\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2) + (\overline{BC}^2 + \overline{CD}^2) \\ &= \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 \Rightarrow \overline{AC} \perp L \end{aligned}$$



2. $\overline{AB} \perp E$, $P, Q \in L$, $\overline{BP} \perp L$, $\overline{AB} = 5$, $\overline{BP} = 12$, $\overline{AQ} = \sqrt{180}$ ，

則 $\overline{BQ} =$ _____ ； $\overline{PQ} =$ _____ 。

答案： $\sqrt{155}$, $\sqrt{11}$

詳解： $\overline{BQ} = \sqrt{\overline{AQ}^2 - \overline{AB}^2} = \sqrt{180 - 25} = \sqrt{155}$

$$\overline{PQ} = \sqrt{\overline{BQ}^2 - \overline{PB}^2} = \sqrt{155 - 144} = \sqrt{11}$$

3. (每格 4 分) 正四面體 $A-BCD$ ， $\overline{AB} = 6$ ，則

(1) 高 $\overline{AG} =$ _____ 。

(2) 表面積為 _____ 。

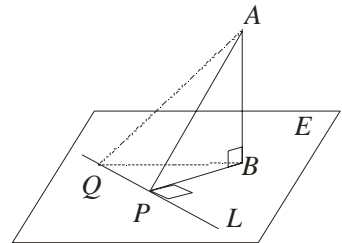
(3) 體積 $V =$ _____ 。

(4) 兩平面 ABC 、 BCD 夾角 θ ，則 $\cos \theta =$ _____ 。

(5) 兩歪斜稜 \overline{AB} 、 \overline{CD} 間距離為 _____ 。

答案：(1) $2\sqrt{6}$ (2) $36\sqrt{3}$ (3) $18\sqrt{2}$ (4) $\frac{1}{3}$ (5) $3\sqrt{2}$

詳解：(1) $h = \frac{\sqrt{6}}{3}a = 2\sqrt{6}$ (2) $4\Delta = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \times 4 = 36\sqrt{3}$



$$(3) V = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3 = \frac{\sqrt{2}}{12} \times 6^3 = 18\sqrt{2} \quad (4) \text{兩平面 } ABC、BCD \text{ 夾角 } \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{3}$$

$$(5) \text{歪斜稜 } \overline{AB}, \overline{CD} \text{ 間距離} = \frac{\sqrt{2}}{2} a = 3\sqrt{2}$$

3、(AC) 下列敘述何者正確？(複選)

- (A) 一線及線外一點，決定唯一平面
- (B) 不相交的兩直線，決定唯一平面
- (C) 兩平行線，決定唯一平面
- (D) 相異三點決定唯一平面
- (E) 相交於一點的兩直線，決定唯一平面

解析：(D) 相異不共線三點，決定唯一平面 (B) 歪斜線，不共平面

4、(BC) 下列敘述何者正確？(複選)

- (A) 垂直同一直線的相異兩直線必平行
- (B) 平面 E_1 平行平面 E ，平面 E_2 垂直平面 E ，則平面 E_1 垂直 E_2
- (C) 平行同一平面之相異兩平面必平行
- (D) 垂直同一平面之相異兩平面必平行
- (E) 平行同一平面的相異兩直線必平行

解析：(D) 此二平面可能相交於一直線 (B) 垂直於同一直線之二直線，可能為歪斜線
(A) 平行同一平面的二直線可能相交於一點，或是歪斜

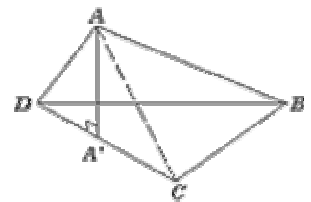
5. 長方形紙 $ABCD$ ， $\overline{AB} = 4$ ， $\overline{AD} = 3$ ，沿著對角線 \overline{BD} 摺起，使 A 點在平面 BCD 上之投影恰在 \overline{CD} 邊長，則此時 $A、C$ 兩點間的距離為_____。

答案： $\sqrt{7}$

解析：

設 A 在平面 BCD 上之投影點為 A' ， A' 在 \overline{CD} 邊上 $\overline{AA'} \perp$ 平面 BCD ，又 $\overline{A'C} \perp \overline{CB} \quad \therefore \overline{AC} \perp \overline{CB}$ (三垂線)

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2} = \sqrt{7}$$



6. 空間中有一點 A ，在平面 E 上的投影為 B ，在平面 E 上有 C, D 兩點且 $\overline{BC} \perp \overline{CD}$ 於 C ，若 $\overline{AD} = 13, \overline{CD} = 5, \overline{BC} = 4$ ，則 $\overline{AB} =$ _____。

答案： $8\sqrt{2}$

解析：由三垂線定理知 $\overline{AC} \perp \overline{CD} \quad \therefore \overline{AC} = 12$

$$\text{又 } \overline{AB} \perp \overline{BC} \quad \therefore \overline{AB} = \sqrt{12^2 - 4^2} = 8\sqrt{2}$$

7. 直三角錐 $ABCD$ 中， $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = 5$ ， $\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{BD} = 6$ ，若平面 ABC 與平面 ABD 之夾角為 α ，平面 ABC 與平面 BCD 的夾角為 β ，則 $\cos \alpha =$ _____， $\cos \beta =$ _____。

答案： $\frac{7}{32}$ ； $\frac{\sqrt{3}}{4}$

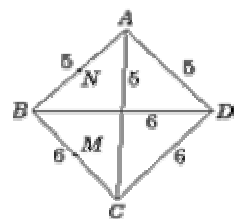
解析：

\overline{BC} 之中點 M ， $\overline{AM} = 4$ 且 $\overline{AM} \perp \overline{BC}$ ， $\overline{DM} = 3\sqrt{3}$ 且 $\overline{DM} \perp \overline{BC}$

$$\therefore \beta = \angle AMD \quad \therefore \cos \beta = \frac{16 + 27 - 25}{2 \cdot 4 \cdot 3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

過 C 作 $\overline{CN} \perp \overline{AB}$ 於 $N \quad \therefore \triangle ABC \cong \triangle ABD$

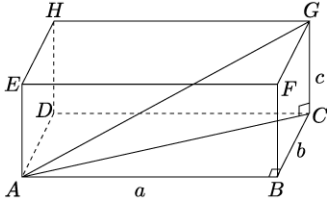
$$\therefore \overline{DN} \perp \overline{AB} \quad \therefore \overline{BN} = 3.6, \overline{CN} = \overline{DN} = 4.8$$



$$\therefore \alpha = \angle CND \quad \therefore \cos \alpha = \frac{\left(\frac{24}{5}\right)^2 + \left(\frac{24}{5}\right)^2 - 36}{2 \cdot \left(\frac{24}{5}\right) \left(\frac{24}{5}\right)} = \frac{7}{32}$$

8、設一長方體之長、寬、高依次為 a, b, c ，試求其對角線之長_____。

答案：如下圖中



對角線 $\overline{AG} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{CG}^2} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CG}^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$