<table>
<tr><td colspan="6">高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：92.10.09</td></tr>
<tr><td rowspan="2">範圍</td><td rowspan="2">向量坐標與應用</td><td>班級</td><td></td><td rowspan="2">姓名</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>座號</td><td></td></tr>
</table>

一、填充題

1. 設$\vec{a}=(2，1)$，$\vec{b}=(3，-4)$，則$\vec{b}$在$\vec{a}$上的正射影為__________。

Ans.$(\frac{4}{5}，\frac{2}{5})$

解析：

$\vec{b}$在$\vec{a}$上的正射影為

$$(\frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2})\cdot\ \vec{a}=(\frac{(3，-4)\cdot(2，1)}{(2，1)\cdot(2，1)})\cdot(2，1)=\frac{2}{5}\ \cdot(2，1)=(\frac{4}{5}，\frac{2}{5})$$

2. 設x，y是實數，$4x-3y=5$，則x^2+y^2之最小值 $=$__________。

Ans.1

解析：

由柯西不等式

$$(4x-3y)^2\le[4^2+(-3)^2](x^2+y^2)\quad\Rightarrow\quad 25\le 25(x^2+y^2)$$

$\Rightarrow\quad x^2+y^2\ge 1$，即最小值 $=1$

3. 設x，y是實數，$4x^2+9y^2=25$，則$x-y+3$之最大值 $=$__________。

Ans.$3+\frac{5}{6}\sqrt{3}$

解析：

由柯西不等式

$$(x-y)^2\le[(\frac{1}{2})^2+(-\frac{1}{3})^2]\,[(2x)^2+(3y)^2]=(\frac{1}{4}+\frac{1}{9})\cdot 25=\frac{13\cdot 25}{36}$$

$$\Rightarrow\quad -\frac{5}{6}\sqrt{13}\le x-y\le\frac{5}{6}\sqrt{13}$$

$$\Rightarrow\quad 3-\frac{5}{6}\sqrt{13}\ \le x-y+3\le 3+\frac{5}{6}\sqrt{13}\ \therefore\quad \text{最大值}=3+\frac{5}{6}\sqrt{13}$$

4. 設$A(4，0)$，$B(0，-3)$，動點P為直線$x+y=0$上之一點，則

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$之最小值 $=$__________。

Ans.$-\frac{48}{8}$

解析：

$A(4，0)$，$B(0，-3)$，$P\in x+y=0\quad\Rightarrow\quad$ 令$P(t，-t)$，$t\in R$

$$\Rightarrow\quad \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(4-t，t)\cdot(-t，-3+t)$$

$$=-t\,(4-t)+(-3+t)=2t^2-7t=2(t-\frac{7}{4})^2-\frac{49}{8}$$

$\therefore$ 當$t=\dfrac{7}{4}$時，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$有最小值 $-\dfrac{49}{8}$

5. 設x，$y\in R$，已知$4x^2+(y+1)^2=8$，令$x+2y$之最大值M，最小值m，則$(M，m)=$______。

Ans.$(-2+\sqrt{34}，-2-\sqrt{34})$

解析：

$4x^2+(y+1)^2=8$

$[(2x)^2+(y+1)^2][(\frac{1}{2})^2+2^2]\geq(x+2y+2)^2$

$\Rightarrow\ 8(\frac{1}{4}+4)\geq(x+2y+2)^2$

$\Rightarrow\ (x+2y+2)^2\leq 34$

$\Rightarrow\ -\sqrt{34}\leq x+2y+2\leq\sqrt{34}$

$\Rightarrow\ -2-\sqrt{34}\leq x+2y\leq -2+\sqrt{34}$

$\therefore$ 最大值$M=-2+\sqrt{34}$，最小值$m=-2-\sqrt{34}$

即$(M，m)=(-2+\sqrt{34}，-2-\sqrt{34})$

6. 在$\triangle ABC$中，若$\overline{AB}=6$，$\overline{BC}=7$，$\overline{CA}=5$，求$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$之值 $=$__________。

Ans.-30

解析：

(sol 一)

$\cos\angle ABC=\dfrac{6^2+7^2-5^2}{2\cdot 6\cdot 7}=\dfrac{5}{7}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\cos\angle BAC'=6\cdot 7\cdot(-\dfrac{5}{7})=-30$

(sol 二)公式$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-\cdot\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=-\dfrac{\overline{BA}^2+\overline{BC}^2-\overline{AC}^2}{2}=-\dfrac{6^2+7^2-5^2}{2}=-30$

7. 已知$x^2+y^2=5$，求$2x+y$的最大值與最小值。

Ans. 最大值 $=5$，最小值 $=-5$

解析：

由(1)$(x^2+y^2)(2^2+1^2)\geq(2x+y)^2$

$\Rightarrow\ 5\cdot 5\geq(2x+y)^2\ \Rightarrow\ (2x+y)^2\leq 25$

$\Rightarrow\ -5\leq 2x+y\leq 5$

$\therefore$ 最大值 $=5$，最小值 $=-5$

8. 設有一直線L，其參數方程式為$\begin{cases}x=3-2t\\ y=4+t\end{cases}$，$t\in R$，下列那點在此直線上？

(A)(3，4) (B)(4，3) (C)(1，5) (D)(7，2) (E)(3，7)

8. (A)(C)(D)

解析：

L： $\begin{cases} x = 3-2t \\ y = 4-t \end{cases}$，$t \in R$

(A)取 $t = 0 \Rightarrow (x，y) = (3，4)$，故選(A)

(B)令 $3-2t = 4 \Rightarrow t = -\dfrac{1}{2}$ 代入 $y \Rightarrow y = 4-\dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{2} \neq 3$，故不選(B)

(C)同法，取 $t = 1 \Rightarrow (x，y) = (1，5)$，故選(C)

(D)令 $x = 3-2t = 7$，$t = -2$ 代入 $y = 4-2 = 2$，故選(D)

(E)$x = 3 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow y = 4 \neq 7$，故不選(E)

9. 設平面上有二直線L_1：$x-2y-3 = 0$，L_2：$2x+ky-1 = 0$，$k \in R$。

(1)若$L_1 \perp L_2$，則$k =$ ＿＿＿＿＿。

(2)若L_1，L_2所夾銳角為 60°，則$k =$ ＿＿＿＿＿或＿＿＿＿＿(有二解)。

Ans.(1)1 (2)$\dfrac{16+10\sqrt{3}}{11}$；$\dfrac{16-10\sqrt{3}}{11}$

解析：

L_1：$x-2y-3 = 0 \Rightarrow$ 取 $\overrightarrow{N_1} = (1，-2)$

L_2：$2x+ky-1 = 0 \Rightarrow$ 取 $\overrightarrow{N_2} = (2，k)$

設L_1，L_2所夾銳角為θ

(1) $L_1 \perp L_2 \Rightarrow \theta = 90° \Rightarrow \overrightarrow{N_1} \cdot \overrightarrow{N_2} = 2-2k = 0 \Rightarrow k = 1$

(2)$\theta = 60° \Rightarrow \cos 60° = \dfrac{|\overrightarrow{N_1} \cdot \overrightarrow{N_2}|}{|\overrightarrow{N_1}||\overrightarrow{N_2}|}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{|2-2k|}{\sqrt{5}\sqrt{4+k^2}} \Rightarrow \sqrt{5}\sqrt{4+k^2} = |4-4k|$

$\Rightarrow 5k^2+20 = 16k^2-32k+16$

$\Rightarrow 11k^2-32k-4 = 0 \Rightarrow k = \dfrac{16 \pm 10\sqrt{3}}{11}$

10. 二直線L_1：$3x+4y-4 = 0$，L_2：$5x+12y-12 = 0$ 之鈍角平分線為＿＿＿＿＿。

Ans.$14x-8y+8 = 0$

解析：

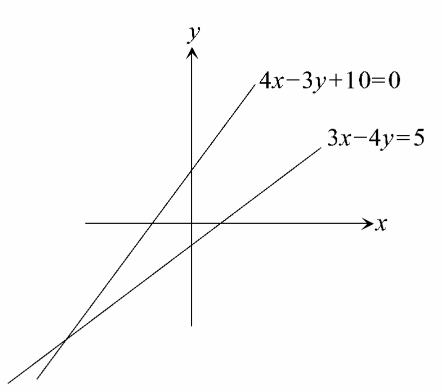
$\dfrac{3x+4y-4}{\sqrt{3^2+4^2}} = \dfrac{5x+12y-12}{\sqrt{5^2+12^2}}$（經同號區）$\Rightarrow 14x-8y+8 = 0$

11. 兩直線 $3x-4y = 5$ 與 $4x-3y+10 = 0$ 所夾之銳角平分線方程式為＿＿＿＿＿。

Ans.$7x-7y+5 = 0$

解析：

如下圖



則銳角平分線方程式為 $\dfrac{3x-4y-5}{5}=\dfrac{-(4x-3y+10)}{5}$(經異號區)

$\Rightarrow\quad 3x-4y-5=-(4x-3y+10)\quad\Rightarrow\quad 7x-7y+5=0$

12. 與直線$x-y-1=0$ 平行且相距為 2 之直線方程式為__________。

Ans：$x-y-1\pm2\sqrt{2}=0$

解析：

設所求直線為 $x-y+k=0$，$k\in R$

$\because$ 與 $x-y-1=0$ 相距為 2 $\Rightarrow$ $\dfrac{|k+1|}{\sqrt{2}}=2\Rightarrow$ $k=-1\pm2\sqrt{2}$

$\therefore$ 所求直線為 $x-y-1\pm2\sqrt{2}=0$