<table>
<tr><td colspan="6">高雄市明誠中學 高二數學平時測驗　　日期：92.10.02</td></tr>
<tr><td rowspan="2">範圍</td><td rowspan="2">向量坐標與應用</td><td>班級</td><td></td><td rowspan="2">姓名</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>座號</td><td></td></tr>
</table>

一、填充題

1. 設$\overrightarrow{OA}=(-3，4)$，$\overrightarrow{OB}=(12，5)$，$\angle AOB$之角平分線交$\overline{AB}$於$P$，則 $\overrightarrow{OP}=$__________ $\overrightarrow{OA}+$__________ $\overrightarrow{OB}$。

答案：$\dfrac{13}{18}$；$\dfrac{5}{18}$

解析：

$\overrightarrow{OA}=(-3，4)\ \Rightarrow\ |\overrightarrow{OA}|=5$；$\overrightarrow{OB}=(12，5)\ \Rightarrow\ |\overrightarrow{OB}|=13$

$\Rightarrow\ \overline{AP}：\overline{PB}=|\overrightarrow{OA}|：|\overrightarrow{OB}|=5：13 \Rightarrow\ \overrightarrow{OP}=\dfrac{13}{18}\overrightarrow{OA}+\dfrac{5}{18}\overrightarrow{OB}$

2. $\triangle ABC$中，$\overline{AB}$之中點$D(5，-2)$，$\overline{BC}$之中點$E(-2，3)$，$\overline{AC}$之中點$F(6，5)$，則 $\triangle ABC$之重心$G=$__________。

答案：(3，2)

解析：

設$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，$C(x_3，y_3)$

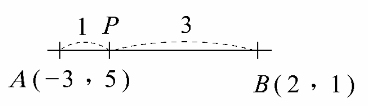
$G(x，y)$是$\triangle ABC$之重心，也是$\triangle DEF$重心

$\Rightarrow\ x=\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}==\dfrac{5-2+6}{3}=3$；　$y=\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}==\dfrac{-2+3+5}{3}=2$

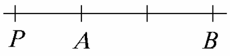
3. 設$A(-3，5)$，$B(2，1)$，若P在直線AB上且$\overline{AP}：\overline{PB}=1：3$，則$P$的坐標爲__________。

答案：$(-\dfrac{7}{4}，4)$ 或 $(-\dfrac{11}{2}，7)$

解析：

(1)內分時，

$\therefore\ P(\dfrac{-9+2}{1+3}，\dfrac{15+1}{1+3})=P(-\dfrac{7}{4}，4)$

(2)外分時，

$\because\ \overline{AP}：\overline{PB}=1：3\ \Rightarrow\ \Rightarrow P(\dfrac{+9+2}{-1+3}，\dfrac{-15+1}{-1+3})=P(-\dfrac{11}{2}，7)$

4. $\triangle ABC$之三邊，$a=\overline{BC}=3$，$b=\overline{CA}=5$，$c=\overline{AB}=7$

① G爲$\triangle ABC$之重心 $\Rightarrow\ \overrightarrow{AG}=$__________ $\overrightarrow{AB}+$__________ $\overrightarrow{AC}$

② I爲$\triangle ABC$之內心 $\Rightarrow\ \overrightarrow{AI}=$__________ $\overrightarrow{AB}+$__________ $\overrightarrow{AC}$

③ H爲$\triangle ABC$之垂心 $\Rightarrow\ \overrightarrow{AH}=$__________ $\overrightarrow{AB}+$__________ $\overrightarrow{AC}$

④ T爲$\triangle ABC$之外心 $\Rightarrow\ \overrightarrow{AT}=$__________ $\overrightarrow{AB}+$__________ $\overrightarrow{AC}$

答案：① $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ ② $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{7}{15}\overrightarrow{AC}$

③ $\overrightarrow{AH}=\frac{-13}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{143}{45}\overrightarrow{AC}$ ④ $\overrightarrow{AT}=\frac{11}{9}\overrightarrow{AB}+(\frac{-49}{45})\overrightarrow{AC}$

解析：

① $a=3$，$b=5$，$c=7$，

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}=\frac{25+49-9}{2}=\frac{65}{2}$

②對於任意三角形 ABC，G 爲△ABC 之重心 $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

③△ABC 之三邊 $a=3$，$b=5$，$c=7$，

I 爲內心 $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AI}=\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}\ \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{7}{15}\overrightarrow{AC}$

④ $a=3$，$b=5$，$c=7$，H 爲△ABC 之垂心

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}=\frac{25+49-9}{2}=\frac{65}{2}$

設 $\overrightarrow{AH}=x\ \overrightarrow{AB}+y\ \overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=x\,|\overrightarrow{AB}|^2+y\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$$\frac{65}{2}=x\cdot7^2+y\cdot\frac{65}{2}\cdots\cdots(1)$$

$\because\ \overrightarrow{AH}=x\ \overrightarrow{AB}+y\ \overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}=x\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+y\,|\overrightarrow{AC}|^2$

$$\frac{65}{2}=x\cdot\frac{65}{2}+y\cdot5^2\cdots\cdots(2)$$

由(1)(2) $x=-\frac{13}{9},\quad y=\frac{143}{45}$，$\overrightarrow{AH}==-\frac{13}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{143}{45}\overrightarrow{AC}$

⑤T 爲△ABC 之外心

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AT}=\frac{1}{2}\overline{AB}^2=\frac{1}{2}\cdot7^2$； $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AT}=\frac{1}{2}\overline{AC}^2=\frac{1}{2}\cdot5^2$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}=\frac{25+49-9}{2}=\frac{65}{2}$

設 $\overrightarrow{AT}=x\ \overrightarrow{AB}+y\ \overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AT}=x\,|\overrightarrow{AB}|^2+y\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$$\frac{49}{2}=x\cdot7^2+y\cdot\frac{65}{2}\cdots\cdots(1)$$

$\because\ \overrightarrow{AT}=x\ \overrightarrow{AB}+y\ \overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AT}=x\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+y\,|\overrightarrow{AC}|^2$

$$\frac{25}{2}=x\cdot\frac{65}{2}+y\cdot5^2\cdots\cdots(2)$$

由(1)(2) $x=\frac{11}{9},\quad y=-\frac{49}{45}$，$\Rightarrow\overrightarrow{AT}=\frac{11}{9}\overrightarrow{AB}+(-\frac{49}{45})\overrightarrow{AC}$

5. 與$(-4，3)$垂直，長爲 2 的向量是 __________。

答案：$\pm(\frac{6}{5}，\frac{8}{5})$

解析：

若$\vec{a}\neq\vec{0}$，則$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$爲$\vec{a}$同方向的單位向量

與$(-4，3)$垂直的向量　即與$(3，4)$平行的向量

$\therefore$　$\pm\frac{(3，4)}{5}$是與 $(3，4)$ 平行的單位向量，故 $\pm 2\frac{(3，4)}{5}=\pm(\frac{6}{5}，\frac{8}{5})$爲所求

6. 已知平面坐標系上三點$A(3，-2)$，$B(-1，1)$，$C(5，4)$，

(1) $|\overrightarrow{AB}|=$ __________。

(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$ __________。

(3)若$\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$，則$D$點坐標爲__________。

(4)$\triangle ABC$面積 $=$ __________。

(5) $\overrightarrow{AC}$在$\overrightarrow{AB}$的正射影之長爲__________。

(6) $\overrightarrow{AC}$在$\overrightarrow{AB}$的正射影爲__________。

(7) $t\in R$，則 $|t\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|$ 的最小值爲__________。

答案：(1)5　(2) 10　(3) $(-11，1)$　(4) 15　(5) 2　(6) $(\frac{-8}{5}，\frac{6}{5})$　(7) 6

解析：

$A(3，-2)$，$B(-1，1)$，$C(5，4)\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB}=(-4，3)$，$\overrightarrow{AC}=(2，6)$

(1) $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$

(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-4，3)\cdot(2，6)=-8+18=10$

(3) $\overrightarrow{AD}=3(-4，3)-(2，6)=(-14，3)$

令$D(x，y)$ $\Rightarrow$ $(x-3，y+2)=(-14，3)$

$\Rightarrow$ $(x，y)=(-11，1)$

(4)$\triangle ABC$面積 $=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(25)(4+36)-10^2}=15$

(5)正射影長 $=\frac{|\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{10}{5}=2$

(6)正射影 $=(\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|^2})\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{10}{25}(-4，3)=(\frac{-8}{5}，\frac{6}{5})$

(7) $|t\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|^2=|t(-4，3)+(2，6)|^2=|(-4t+2，3t+6)|^2$

$$=(-4t+2)^2+(3t+6)^2=25t^2+20t+40$$

$$=25(t+\frac{2}{5})^2+40-25\times\frac{4}{25}=25(t+\frac{2}{5})^2+36$$

$\therefore$ 當$t=-\frac{2}{5}$時，$|t\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|$ 有最小値$\sqrt{36}=6$

7. 設$P(0，1)$，$Q(1，2)$，$R(-3，-4)$，$S(0，2)$爲平面上四點，且$\overrightarrow{AB}=t\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RS}$，$t$爲實數，則當 $|\overrightarrow{AB}|$ 有最小値時，$t=$__________。

答案：$-\frac{9}{2}$

解析：

由已知可得$\overrightarrow{PQ}=(1，1)$，$\overrightarrow{RS}=(3，6)$

$\therefore$ $\overrightarrow{AB}=t\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RS}=t(1，1)+(3，6)=(t+3，t+6)$

$\Rightarrow$ $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(t+3)^2+(t+6)^2}=\sqrt{2t^2+18t+45}=\sqrt{2(t+\frac{9}{2})^2+\frac{9}{2}}$

故當 $t=-\frac{9}{2}$時，$|\overrightarrow{AB}|$ 有最小値爲$\frac{3}{\sqrt{2}}$

8. 設$\vec{a}=(-1，2)$，$\vec{b}=(1，k)$，若$\vec{a}$，$\vec{b}$ 之夾角爲 150°，則 k 之値 $=$____________。

答案：$k=8-5\sqrt{3}$

解析：

$\cos150°=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ $\Rightarrow$ $-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{-2+2k}{\sqrt{5}\sqrt{1+k^2}}\Rightarrow$ $\frac{3}{4}=\frac{(-1+2k)^2}{5(1+k^2)}$

$\Rightarrow$ $k^2-16k-11=0$ $\Rightarrow$ $k=8\pm5\sqrt{3}$（正不合 $\because$ $-1+2k<0$）

9. 設 $A(2，1)$，$B(-3，2)$，$P(5，-3)$且 $2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+5\overrightarrow{PC}=\vec{0}$，試求$\triangle ABC$ 之面積。

答案：17

解析：

設$C(x,y)$，$\overrightarrow{PA}=(-3,4)$，$\overrightarrow{PB}=(-8,5)$，$\overrightarrow{PC}=(x-5,y+3)$

又 $2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+5\overrightarrow{PC}=\vec{0}$，$2(-3,4)+3(-8,5)+5(x-5,y+3)=\vec{0}$

$$\Rightarrow\begin{cases}-6-24+5(x-5)=0\\8+15+5(y+3)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=11\\y=-\frac{38}{5}\end{cases}\Rightarrow C(11,-\frac{38}{5})$$

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB}=(-5，1)$，$\overrightarrow{AC}=(9，-\frac{43}{5})$

$$\Rightarrow \quad a\triangle ABC = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 9 & -\frac{43}{5} \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|43-9| = 17$$

10.(C) 直線 L：$3x-4y=7$ 有一個方向向量爲$(1，t)$，$t\in R$，則 t 之值爲

(A)$\frac{4}{3}$ (B)$\frac{3}{4}$ (C)$-\frac{4}{3}$ (D)$-\frac{3}{4}$ (E)不是唯一的實數。

解析：

$\because$ 直線 $ax+by+c=0$ 的一個方向向量爲 $(b，-a)$，

$\therefore$ L：$3x-4y=7$ 的一個方向向量爲$(4，3)=4(1,\frac{3}{4})\Rightarrow(1,\frac{3}{4})=(1，t)$ $\therefore$ $t=\frac{3}{4}$

11.(D) 直線 L 的參數式爲$\begin{cases}x=4-t\\y=3+2t\end{cases}$，$t\in R$，則 L 的斜率爲

(A)$\frac{4}{3}$ (B)$\frac{3}{4}$ (C)$-\frac{1}{2}$ (D)-2 (E)$\frac{1}{2}$

解析：

由 L：$\begin{cases}x=4-t\\y=3+2t\end{cases}$，直線方程式$2x+y=11\Rightarrow$斜率$m=-\frac{2}{1}=-2$ $\therefore$ L 的斜率爲 -2

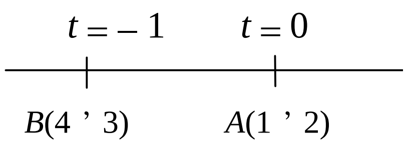
12. (B) 設 $A(1，2)$，$B(4，3)$，則$\overrightarrow{BA}$(BA 射線)的參數方程式，可爲

(A)$\begin{cases}x=1-3t\\y=2-t\end{cases}$，$-1\le t\le 0$ (B)$\begin{cases}x=1-3t\\y=2-t\end{cases}$，$t\ge -1$

(C)$\begin{cases}x=1-3t\\y=2-t\end{cases}$ $t\le 0$ (D)$\begin{cases}x=1-3t\\y=2+t\end{cases}$ $t\ge 0$

(E)$\begin{cases}x=1-3t\\y=2+t\end{cases}$ $0\le t\le 1$

解析：



$\therefore$ $\overrightarrow{BA}$ 的參數方程式，可爲$\begin{cases}x=1-3t\\y=2-t\end{cases}$，$t\ge -1$

$\overline{AB}$ 的參數方程式，可爲$\begin{cases}x=1-3t\\y=2-t\end{cases}$，$-1\le t\le 0$

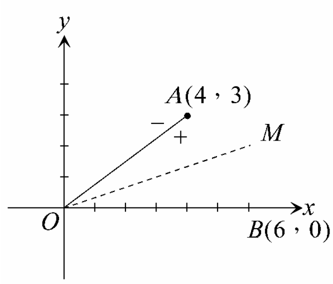
$\overrightarrow{AB}$ 的參數方程式，可爲$\begin{cases}x=1-3t\\y=2-t\end{cases}$，$t\le 0$

13. 設$O(0，0)$，$A(4，3)$，$B(6，0)$，則$\angle AOB$之分角線方程式爲__________。

答案：.$x-3y=0$

解析：

如上圖



$\overleftrightarrow{OA}$之直線方程為 $3x-4y=0\cdots\cdots L_1$

$\overleftrightarrow{OB}$ 之直線方程式為$y=0\cdots\cdots L_2$

$\Rightarrow$ $\angle AOB$之角平分線M：$d_1=d_2$，且經同號區

$\Rightarrow$ $\dfrac{3x-4y}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=+\dfrac{y}{\sqrt{0^2+1^2}}\Rightarrow 3x-4y=5y\Rightarrow\ \ 3x-9y=0$

$\Rightarrow$ $x-3y=0$

14. 求二直線L_1：$\begin{cases}x=2-t\\y=1+3t\end{cases}$（$t\in R$），$L_2$：$3x-2y-1=0$ 之交點為__________。

答案：$(\dfrac{5}{3}$，$2)$

解析：

將L_1：$\begin{cases}x=2-t\\y=1+3t\end{cases}$（$t\in R$）代入$L_2$

得 $3(2-t)-2(1+3t)-1=0$ $\Rightarrow$ $t=\dfrac{1}{3}$，故交點$(x，y)=(\dfrac{5}{3}，2)$

15. 設直線的參數方程式分別為L_1：$\begin{cases}x=3+2t\\y=2-t\end{cases}$，$t\in R$，$L_2$：$\begin{cases}x=-1+t\\y=5-t\end{cases}$，$t\in R$，求

(1) L_1與L_2的交點為__________。 (2)兩線銳夾角為__________。

答案：.(1)(1，3) (2) $\cos^{-1}\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

解析：

(1) L_1：$\begin{cases}x=3+2t\\y=2-t\end{cases}$，$t\in R$，$L_2$：$\begin{cases}x=-1+s\\y=5-s\end{cases}$，$s\in R$

則$\begin{cases}3+2t=-1+s\\2-t=5-s\end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}2t-s=-4\cdots\cdots ①\\-t+s=3\cdots\cdots ②\end{cases}$

解①，② $\Rightarrow$ $t=-1$，$s=2$，故L_1與L_2的交點為(1，3)

(2) L_1：$\begin{cases}x=3+2t\\y=2-t\end{cases}$方向向量$\overline{v_1}=(2,-1)$， L_2：$\begin{cases}x=-1+t\\y=5-t\end{cases}$方向向量$\overline{v_2}=(1,-1)$

$\because$ L_1與L_2的交角θ 就是兩向量$\overline{v_1}=(2,-1)$與$\overline{v_2}=(1,-1)$的夾角

$\therefore$ $\cos\theta=\pm\dfrac{2\cdot1+(-1)\cdot(-1)}{\sqrt{2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\pm\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

故兩直線的銳夾角為$\cos^{-1}\dfrac{3}{\sqrt{10}}$