高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：92.09.26					
範圍	1-2 向量基本運用	班級		姓名	
		座號			

一. 填充題(每格 10 分)

1. 設 $|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=5$，$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{13}$，則

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=$ ____________，(2)$|\vec{a}-\vec{b}|=$ __________。

Ans：(1)– 14 (2)$\sqrt{69}$

【詳解】

(1)由 $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{13}$ $\Rightarrow$ $|\vec{a}+\vec{b}|^2=13$ $\Rightarrow$ $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=13$

$\Rightarrow$ $|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=13$ $\Rightarrow$ $16+2\vec{a}\cdot\vec{b}+25=13$

$\Rightarrow$ $\vec{a}\cdot\vec{b}=-14$

(2) $|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=16+28+25=69$

$\therefore$ $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{69}$

2. $\triangle ABC$的三邊長爲 $\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=5$，$\overline{AC}=6$，求 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=$ __________。

Ans：$-\dfrac{5}{2}$

【詳解】

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=-|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|\cos\theta$

$=-|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|\dfrac{\overline{BA}^2+\overline{BC}^2-\overline{AC}^2}{2\times\overline{BA}\times\overline{BC}}=-\dfrac{\overline{BA}^2+\overline{BC}^2-\overline{AC}^2}{2}=-\dfrac{4^2+5^2-6^2}{2}=-\dfrac{5}{2}$

3. 設 $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{a}+\vec{b}|=4$，則

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=$ ____________，

(2)向量$\vec{a}$，$\vec{b}$ 所圍三角形面積 $=$ __________。

Ans：(1) $\dfrac{3}{2}$ (2)$\dfrac{3}{4}\sqrt{15}$

【詳解】

$4^2=|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=4+9+2\vec{a}\cdot\vec{b}\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{3}{2}$

三角形面積 $=\dfrac{1}{2}\sqrt{4\times9-(\dfrac{3}{2})^2}=\dfrac{3}{4}\sqrt{15}$

4. 設 $|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=5$，$|\vec{c}|=6$ 且$\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c}=\vec{0}$，則$\vec{a}\cdot\vec{b}=$ __________。

Ans：52

【詳解】

$|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=5$，$|\vec{c}|=6$

$\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c}=\vec{0}$ $\Rightarrow$ $\vec{a}+2\vec{b}=3\vec{c}$

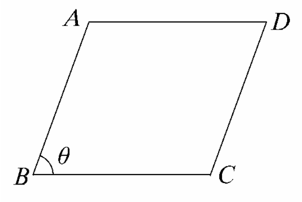
$\Rightarrow$ $|\vec{a}+2\vec{b}|^2=|3\vec{c}|^2$ $\Rightarrow$ $|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=9|\vec{c}|^2$

$\Rightarrow$ $16+4\vec{a}\cdot\vec{b}+100=324$ $\Rightarrow$ $\vec{a}\cdot\vec{b}=52$

5. 設平行四邊形$ABCD$中，已知$\overline{AB}=8$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=20$，則$\overrightarrow{BC}$之長為__________。

Ans： $2\sqrt{11}$

【詳解】



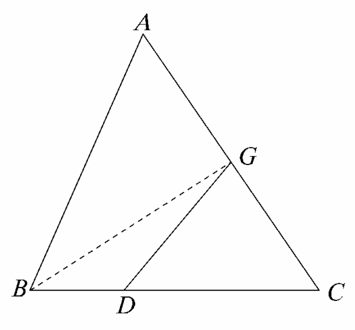
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}&=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})\\&=|\overrightarrow{AB}|^2-|\overrightarrow{AD}|^2\\&=|\overrightarrow{AB}|^2-|\overrightarrow{BC}|^2\end{aligned}$$

$$20=64-|\overrightarrow{BC}|^2\quad\therefore\quad|\overrightarrow{BC}|^2=44\quad\Rightarrow\quad\overrightarrow{BC}=2\sqrt{11}$$

6. $\triangle ABC$中，D為$\overline{BC}$上一點且$\overline{CD}=3\ \overline{BD}$，$G$為$\overline{AC}$中點，若$\overline{GD}=r\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}$，$r$，$s\in R$，則數對 $(r，s)=$__________。

Ans：$(\frac{3}{4}，-\frac{1}{4})$

【詳解】

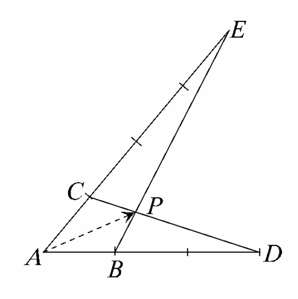


$$\begin{aligned}\overrightarrow{GD}&=\frac{3}{4}\overrightarrow{GB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{GC}=\frac{3}{4}(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB})+\frac{1}{4}(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC})\\&=\frac{3}{4}(-\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AB})+\frac{1}{8}\overrightarrow{AC}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC})+\frac{1}{8}\overrightarrow{AC}\\&=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\ \therefore\quad(r，s)=(\frac{3}{4}，-\frac{1}{4})\end{aligned}$$

7. 於$\triangle ABC$中，延長$\overrightarrow{AB}$使$\overline{AD}=3\overline{AB}$，延長$\overrightarrow{AC}$使$\overline{AE}=4\overline{AC}$，$\overline{CD}$與$\overline{BE}$相交於$P$，若$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，則 $(x，y)=$__________。

Ans： $(\frac{9}{11}，\frac{8}{11})$

【詳解】



$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y(\frac{1}{4}\overrightarrow{AE})$

B, P, E 三點共線：$x+\frac{y}{4}=1\quad\Rightarrow\quad4x+y=4$

$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{AP}=x(\frac{1}{3}\overrightarrow{AD})+y\overrightarrow{AC}$

D, P, C 三點共線：$\frac{x}{3}+y=1\quad\Rightarrow\quad x+3y=3$

解之得$x=\frac{9}{11}$，$y=\frac{8}{11}$　　即$\overrightarrow{AP}=\frac{9}{11}\overrightarrow{AB}+\frac{8}{11}\overrightarrow{AC}$

8. $\triangle ABC$之三邊，$a=\overline{BC}=3$，$b=\overline{CA}=5$，$c=\overline{AB}=7$

(1) G為$\triangle ABC$之重心 $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AG}=$__________$\overrightarrow{AB}+$__________$\overrightarrow{AC}$

(2) I為$\triangle ABC$之內心 $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AI}=$__________$\overrightarrow{AB}+$__________$\overrightarrow{AC}$

Ans： (1) $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$　　(2) $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{7}{15}\overrightarrow{AC}$

【詳解】

(1)對於任意三角形 ABC，G 爲△ABC 之重心 $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

(2)△ABC 之三邊 $a=3$，$b=5$，$c=7$

I 爲內心 $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AI}=\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}\ \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{7}{15}\overrightarrow{AC}$

9. 設四邊形$ABCD$中，$P\in\overline{AB}$ 且 $\overline{AP}:\overline{PB}=2:3$，$Q\in\overline{CD}$ 且 $\overline{CQ}:\overline{QD}=3:2$，則 $\overrightarrow{PQ}=$__________ $\overrightarrow{AD}+$__________ $\overrightarrow{BC}$。

Ans： $\frac{3}{5}$；$\frac{2}{5}$

【詳解】

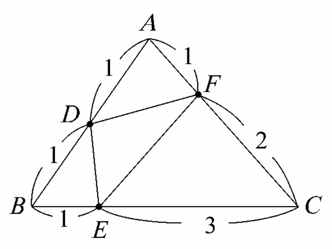
$\overrightarrow{PQ}=\frac{3}{5}\overrightarrow{PD}+\frac{2}{5}\overrightarrow{PC}$

$=\frac{3}{5}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AP})+\frac{2}{5}(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BP})=\frac{3}{5}〔\overrightarrow{AD}-(\frac{2}{5}\overrightarrow{AB})]+\frac{2}{5}[\overrightarrow{BC}-(-\frac{3}{5}\overrightarrow{AB})]$

$=\frac{3}{5}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$

10. 設△ABC中，D，E，F三點分別在$\overline{AB}$，$\overline{BC}$，$\overline{CA}$上，$\overline{AD}=\overline{DB}$，$\overline{BC}=4\overline{BE}$，$\overline{CF}=2\overline{AF}$ 且G是△DEF的重心，若$\overrightarrow{AG}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，則 $(x，y)=$__________。

Ans： $(\frac{5}{12}，\frac{7}{36})$



【詳解】

∵ G 爲△DEF 的重心

∴ $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF})$

$=\frac{1}{3}〔\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC})+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}〕$

$=\frac{1}{3}(\frac{5}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{7}{12}\overrightarrow{AC})=\frac{5}{12}\overrightarrow{AB}+\frac{7}{36}\overrightarrow{AC}$　　∴ $(x，y)=(\frac{5}{12}，\frac{7}{36})$