高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：92.09.19					
範圍	1-1 向量、內積	班級		姓名	
		座號			

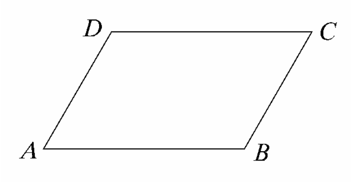
一. 填充題(每題 8 分)

1.(　　) 就平行四邊形 $ABCD$ 而言，下列敘述何者正確？(複選)

(A) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$　(B) $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$　(C) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

(D) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}=0$　(E) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$

Ans：. (B) (C) (E)



【詳解】

(A)如右上圖，應是 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

(B)$\because$ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$　$\therefore$ $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|=|\overrightarrow{CD}|$

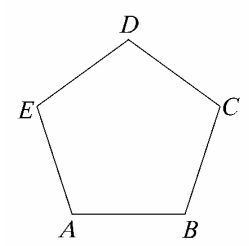
(C) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

(D) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ (請勿寫 0)

(E) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

2. 由正五邊形的邊，可決定__________個不同的向量。

Ans： 10



【詳解】

正五邊形的五個邊當中，沒有任何二邊是平行的，
故每一邊均可決定二個大小相同，方向相反的向量。
因其共有五個邊，故共可決定 10 個不同的向量。

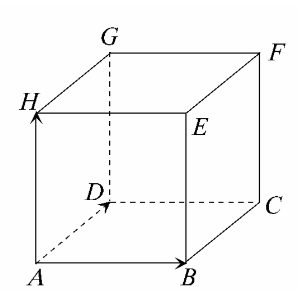
3. 設A，B，C表相異三點，則 $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=$__________

Ans： $\overrightarrow{CB}$

【詳解】 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$　$\Rightarrow$　$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CB}$

4. 有一正立方體，其邊長都是 5，若向量$\vec{a}$的起點與終點都是此正立方體的頂點，且 $|\vec{a}|=5$，則共有__________不相等的向量$\vec{a}$ 。

Ans： 6



【詳解】

$\vec{a}$　$\Rightarrow$　$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BA}$；$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{DA}$；$\overrightarrow{AH}$，$\overrightarrow{HA}$

$\therefore$　共有 6 個不相等的向量$\vec{a}$

5. 設 $|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{13}$，則 $|\vec{a}-\vec{b}|=$__________ 。

Ans： $\sqrt{37}$

【詳解】

(1)由 $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{13}$　$\Rightarrow$　$|\vec{a}+\vec{b}|^2=13$　$\Rightarrow$　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=13$

$\Rightarrow\ |\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=13\ \Rightarrow\ 16+2\vec{a}\cdot\vec{b}+9=13$

$\Rightarrow\ \vec{a}\cdot\vec{b}=-6$

(2) $|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=16+12+9=37$

$\therefore\ |\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{37}$

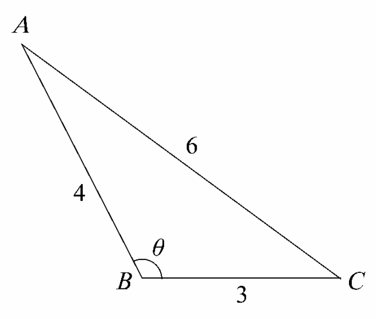
6. $\triangle ABC$的三邊長爲$\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=3$，$\overline{AC}=6$，求$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=$ ＿＿＿＿＿。

Ans： $\frac{11}{2}$

【詳解】

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=-|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|\cos\theta$

$=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|\ \frac{\overline{BA}^2+\overline{BC}^2-\overline{AC}^2}{2\times\overline{BA}\times\overline{BC}}=\frac{\overline{BA}^2+\overline{BC}^2-\overline{AC}^2}{2}=-\ \frac{4^2+3^2-6^2}{2}=\frac{11}{2}$



7. 設 $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{a}+\vec{b}|=4$，則向量$\vec{a}$，$\vec{b}$所圍平行四邊形面積 = ＿＿＿＿＿。

Ans： $\frac{3}{2}\sqrt{15}$

【詳解】

$4^2=|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=4+9+2\vec{a}\cdot\vec{b}\Rightarrow\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{3}{2}$

平行四邊形面積 $=\sqrt{4\times9-(\frac{3}{2})^2}=\frac{3}{2}\sqrt{15}$

8. 設 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，$\vec{a}$與$\vec{b}$之夾角爲 $60°$，則$\vec{a}+\vec{b}$與$\vec{b}-2\vec{a}$之夾角 = ＿＿＿＿＿。

Ans： $120°$

【詳解】

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，夾角 $60°\ \Rightarrow\ |\vec{a}||\vec{b}|=1\cdot1\cdot\cos60°=\frac{1}{2}$

$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=1+1+1=3\Rightarrow\ |\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{3}$

$|\vec{b}-2\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2+4|\vec{a}|^2-4\vec{a}^2\cdot\vec{b}^2=1+4-2=3\Rightarrow\ |\vec{b}-2\vec{a}|=\sqrt{3}$

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{b}-2\vec{a})=|\vec{b}|^2-2|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=1-2-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$

設θ爲$\vec{a}+\vec{b}$與$\vec{b}-2\vec{a}$之夾角

$\Rightarrow\ \cos\theta=\frac{(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{b}-2\vec{a})}{|\vec{a}+\vec{b}||\vec{b}-2\vec{a}|}=\frac{-\frac{3}{2}}{\sqrt{3}\sqrt{3}}=-\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \theta=120°$

9. 設 $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{c}|=4$ 且 $2\vec{a}+3\vec{b}-4\vec{c}=\vec{0}$ ，則$\vec{a}\cdot\vec{b}=$__________ 。

Ans： $\dfrac{53}{4}$

【詳解】

$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{c}|=4$

$2\vec{a}+3\vec{b}-4\vec{c}=\vec{0} \quad\Rightarrow\quad 2\vec{a}+3\vec{b}=4\vec{c}$

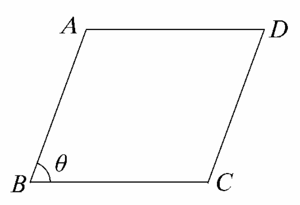
$\Rightarrow\quad |2\vec{a}+3\vec{b}|^2=|4\vec{c}|^2 \quad\Rightarrow\quad 4|\vec{a}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2=16|\vec{c}|^2$

$\Rightarrow\quad 16+12\vec{a}\cdot\vec{b}+81=256 \quad\Rightarrow\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{53}{4}$

10. 設平行四邊形$ABCD$中，已知$\overline{AB}=8$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=20$，則$\overline{BC}$之長爲__________ 。

Ans： $2\sqrt{21}$

【詳解】



$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})$

$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DC})$

$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB})$

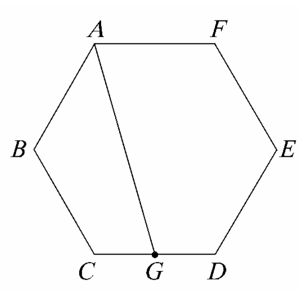
$=|\overrightarrow{BC}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2$

$20=|\overrightarrow{BC}|^2-64 \quad\therefore\quad |\overrightarrow{BC}|^2=84 \quad\Rightarrow\quad \overline{BC}=2\sqrt{21}$

11. 設G爲正六邊形$ABCDEF$之一邊$\overline{CD}$上之中點，若$\overrightarrow{AG}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AF}$ ，則 $(\alpha，\beta)=$__________ 。

Ans： $(2，\dfrac{3}{2})$

【詳解】



$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FC})+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CD}$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}+2\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AF}$

$\therefore\quad (\alpha，\beta)=(2，\dfrac{3}{2})$

12. $\triangle ABC$中，M爲$\overline{BC}$之中點，$\overrightarrow{AD}=4\overrightarrow{AB}$ ，$\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AC}$ ，延長$\overline{AM}$交$\overline{DE}$於P，則

(1) $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AM} \quad\Rightarrow\quad k=$__________ 。

(2) $\overrightarrow{AP}=$__________$\overrightarrow{AD}+$__________$\overrightarrow{AE}$ 。

Ans： (1) $k=\dfrac{24}{7}$ (2) $\overrightarrow{AP}=\dfrac{3}{7}\overrightarrow{AD}+\dfrac{4}{7}\overrightarrow{AE}$

【詳解】

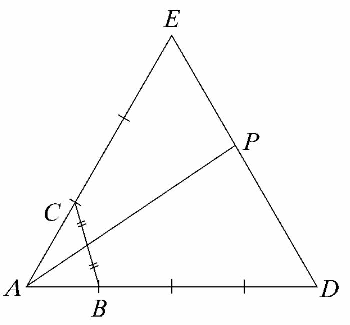
M 為 $\overline{BC}$ 之中點$\Rightarrow \overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$（$M$ 為 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 所成平行四邊形對角線之中點）

設 $\overrightarrow{AP}=k\,\overrightarrow{AM}=\dfrac{k}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{k}{2}\overrightarrow{AC}$

$=\dfrac{k}{2}\cdot\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AD}+\dfrac{k}{2}\cdot\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AE}=\dfrac{k}{8}\overrightarrow{AD}+\dfrac{k}{6}\overrightarrow{AE}$

$\because$ D，P，E 三點共線 $\therefore$ $\dfrac{k}{8}+\dfrac{k}{6}=1 \Rightarrow k=\dfrac{24}{7}$

$\therefore \overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{24}{7}\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{24}{7}\overrightarrow{AE}=\dfrac{3}{7}\overrightarrow{AD}+\dfrac{4}{7}\overrightarrow{AE}$



13. $\triangle ABC$中，D為 $\overline{BC}$ 上一點且 $\overline{CD}=2\overline{BD}$，$G$為 $\overline{AC}$ 中點，若$\overline{GD}=r\,\overrightarrow{AB}+s\,\overrightarrow{AC}$，$r$，$s\in R$，則數對 $(r，s)=$__________。

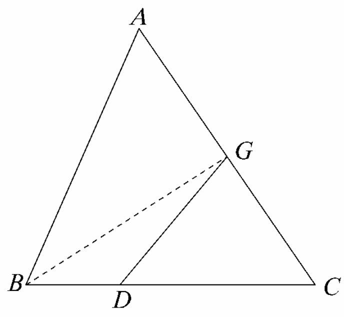
Ans： $(\dfrac{2}{3}，-\dfrac{1}{6})$

【詳解】

$\overrightarrow{GD}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{GB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{GC}=\dfrac{2}{3}(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB})+\dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC})$

$=\dfrac{2}{3}(-\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AB})+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AC}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\dfrac{2}{3}(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC})+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

$=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AC}$ $\therefore$ $(r，s)=(\dfrac{2}{3}，-\dfrac{1}{6})$



14. $\triangle ABC$及一點O，若$(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-2\,\overrightarrow{OA})=0$，則$\triangle ABC$的形狀為__________。

Ans： 等腰△

【詳解】

$\because$ $(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OA})=0 \Rightarrow (\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})\cdot[(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})]=0$

$\Rightarrow \overrightarrow{CB}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=0 \Rightarrow (\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=0$

$\Rightarrow |\overrightarrow{AB}|^2-|\overrightarrow{AC}|^2=0 \Rightarrow |\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{AC}|^2 \Rightarrow \overline{AB}=\overline{AC}$ $\therefore$ $\triangle ABC$為等腰△

15. $\triangle ABC$中，若$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}$，則$\triangle ABC$的形狀為__________。

Ans： 等腰三角形

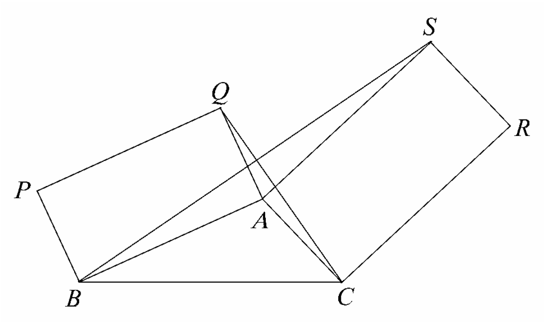
【詳解】

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AC}=0$

$\Rightarrow(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=0\Rightarrow|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2=0\Rightarrow|\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2\Rightarrow \overline{AB}=\overline{AC}$

故$\triangle ABC$為等腰三角形

16. 在下面的平面圖形中，四邊形 $ABPQ$ 與 $ACRS$ 都是矩形，且 $\overline{AB}=2\overline{AQ}$ ，$\overline{AS}=2\overline{AC}$ ，求證：向量 $\overrightarrow{BS}$ 與 $\overrightarrow{CQ}$ 垂直。



【證明】

$\because\ \overrightarrow{BS}\cdot\overrightarrow{CQ}$

$=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AS})\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AQ})$

$=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{AQ}$

$\because\ \overrightarrow{BA}\perp\overrightarrow{AQ}$ ，$\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{AS}$

$\therefore\ \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AQ}=0$，$\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{CA}=0$

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cos\angle BAC=(2\overline{AQ})(\frac{1}{2}\overline{AS})\cos(\pi-\angle QAS)$

$=\overline{AQ}\cdot\overline{AS}(-\cos\angle QAS)=-\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{AS}$

$\therefore\ \overrightarrow{BS}\cdot\overrightarrow{CQ}=-\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{AS}+0+0+\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{AQ}=0$

$\therefore\ \overrightarrow{BS}\perp\overrightarrow{CQ}$.