高雄市明誠中學　高三(上)數學複習測驗　　日期：92.10.18					
範圍	Book5-2-2 指數對數不等式	班級	普三　　班	姓名	
		座號			

一、 單選題

1. 下列那一個數的值最小？（單選）

 (A) $(0.9)^{-3.5}$ (B) $(0.9)^{-2.5}$ (C) $(0.9)^{-1.5}$ (D) $(0.9)^{-\sqrt{3}}$ (E) $(0.9)^{-\sqrt{5}}$

Ans： (C)

解析：$0<0.9<1\Rightarrow f(x)=(0.9)^x$爲遞減函數，即指數$x$之值愈大時，$f(x)$之值愈小，

 又 $-1.5>-\sqrt{3}>-\sqrt{5}>-2.5>-3.5$，故$(0.9)^{-1.5}$之值最小

2. 若$\log_a 2<\log_b 2<0$，則（單選）

 (A) $0<a<b<1$ (B) $0<b<a<1$ (C) $a>b>1$

 (D) $b>a>1$ (E) a，b大小不能比較

Ans： (B)

解析：$\log_a 2<\log_b 2<0$，故(1) $0<a<1$ 且 $0<b<1$，(2)由遞減性質知，$a>b$

 由(1)，(2)得 $0<b<a<1$

3. 若 $0<a<b<1$，則下列不等式那一個正確？（單選）

 (A) $(1-a)^{\frac{1}{b}}>(1-a)^b$ (B) $(1+a)^a>(1+b)^b$ (C) $(1-a)^b>(1-a)^{\frac{b}{2}}$

 (D) $(1-a)^a>(1-b)^b$ (E) $(1-a)^b>(1-b)^a$

Ans： (D)

解析：$0<a<b<1 \quad\Rightarrow\quad 1>1-a>1-b>0$

 (A)因 $0<1-a<1$ 且 $\dfrac{1}{b}>1>b>0$，由指數遞減性質知$(1-a)^{\frac{1}{b}}<(1-a)^b$

 (B) $1+b>1+a>1$，$b>a>0 \quad\Rightarrow\quad (1+b)^b>(1+a)^a$

 (C) $b>\dfrac{b}{2}>0$，$0<1-a<1 \quad\Rightarrow\quad (1-a)^b(1-a)^{\frac{b}{2}}$

 (D)$1>1-a>1-b>0$，$b>a>0\Rightarrow\quad (1-a)^a>(1-b)^a>(1-b)^b$此式爲真

 (E)無法比較

4. $0.5^{0.3}$，$\log_{0.5}0.3$，$0.3^{0.5}$的大小關係爲（單選）

 (A) $0.5^{0.3}<0.3^{0.5}<\log_{0.5}0.3$ (B) $0.5^{0.3}<\log_{0.5}0.3<0.3^{0.5}$

 (C) $\log_{0.5}0.3<0.3^{0.5}<0.5^{0.3}$ (D) $\log_{0.5}0.3<0.5^{0.3}<0.3^{0.5}$

 (E) $0.3^{0.5}<0.5^{0.3}<\log_{0.5}0.3$

Ans： (E)

解析：

 $\log 0.5^{0.3}=0.3\log 0.5=0.3\log\dfrac{1}{2}=0.3\times(-\log 2)\doteqdot(0.3)(-0.3010)=-0.0903$

 $\log 0.3^{0.5}=0.5\log 0.3=0.5\log\dfrac{3}{10}=0.5\times(\log 3-1)\doteqdot(0.5)(0.4771-1)=-0.261\cdots$

 $\therefore\quad \log 0.5^{0.3}>\log 0.3^{0.5}\quad\Rightarrow\quad 1>0.5^{0.3}>0.3^{0.5}$

 又$\log_{0.5}0.3=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{3}{10}>1(\quad\because\quad 1>\dfrac{3}{10}>\dfrac{1}{2})$，故 $0.3^{0.5}<0.5^{0.3}<\log_{0.5}0.3$

5. 設函數 $y=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2}$ $(x\le 0)$的反函數爲 $y=g(x)$，則當 $a>b\ge 1$ 時，有（單選）

(A) $g(a)<g(\frac{a+b}{2})<g(b)$　(B) $g(a)<g(b)<g(\frac{a+b}{2})$

(C) $g(b)<g(a)<g(\frac{a+b}{2})$　(D) $g(b)<g(\frac{a+b}{2})<g(a)$

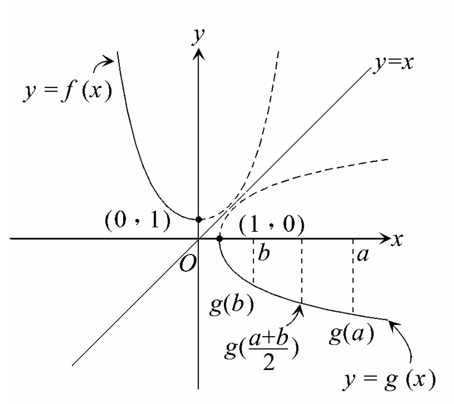
(E) $g(\frac{a+b}{2})<g(a)<g(b)$

Ans： (A)

解析：

$f(x)=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2}$ $(x\le 0)$之反函數爲

$g(x)=\log_2(x-\sqrt{x^2-1})$，其圖形如右：



$y=g(x)(x\ge 1)$爲單調遞減，

故$a>\dfrac{a+b}{2}>b\ge 1$ 時$g(a)<g(\dfrac{a+b}{2})<g(b)$

二、多重選擇題

1. 設 $\theta=\log_{\frac{3}{2}}4$，則（複選）

(A) $\theta<1$　(B) $\theta<2$　(C) $1<\theta<4$　(D) $3<\theta<5$　(E) $\theta<0$

Ans： (C)(D)

解析：

$\theta=\log_{\frac{3}{2}}4$，因 $4>\dfrac{3}{2}>1$ $\Rightarrow$ $\theta>1$

又$(\dfrac{3}{2})^3<4<(\dfrac{3}{2})^4$ $\Rightarrow$ $3<\log_{\frac{3}{2}}4<4$，故選(C)(D)

2. 已知 $f(x)=|\log x|$，當 $0<a<b<c$ 時，$f(b)<f(c)<f(a)$，則（複選）

(A) $(a-1)(b-1)<0$　(B) $ac>1$　(C) $ac=1$

(D) $0<ac<1$　(E) $(a-1)(b-1)>1$

Ans： (A)(D)

解析：$f(x)=|\log x|$

(1)已知 $0<a<b<c$ $\Rightarrow$ $f(b)<f(c)<f(a)\Rightarrow$ $|\log b|<|\log c|<|\log a|$

但是 $\log a<\log b<\log c$，知 $\log a<0<\log b<\log c$

$\Rightarrow$ $0<a<1$，$c>b>1$，故$(a-1)(b-1)<0$

(2) $|\log a|>|\log c|$ $\Rightarrow$ $-\log a>\log c$ $\Rightarrow$ $\log\dfrac{1}{a}>\log c$

$\Rightarrow$ $\dfrac{1}{a}>c>0$ $\Rightarrow$ $0<ac<1$

3. 設$f(x)=a^x(a>0$，$a\ne 1)$，x爲實數，下列敘述何者爲真？

(A)若$x<0$，則$f(x)<0$　(B)若$x>1$，則$f(x)>1$　(C)若 $0<a<1$ 且$x<0$，則$f(x)>1$　(D)

若 $0<a<1$ 且$x_1>x_2$則$f(x_1)<f(x_2)$　(E)若$a>b>1$，$x\in R$，則$a^x>b^x$

Ans： (C)(D)

解析：$f(x)=a^x(a>0，a\neq 1)$

(A) $a>0$，$\forall x\in R$，$a^x>0$ 恆成立

(B) $0<a<1$ 時，$x>0 \quad\Rightarrow\quad a^x<1 \quad\Rightarrow\quad f(x)<1$，(如：$(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}<1$)

(C) $0<a<1$，$x<0 \quad\Rightarrow\quad a^x>1 \quad\Rightarrow\quad f(x)>1$，(如：$(\frac{1}{2})^{-2}=2^2=4>1$)

(D) $0<a<1$ 時，$f(x)$遞減，即乘方大者其值較小故$x_1>x_2$

$\Rightarrow\quad a^{x_1}<a^{x_2} \quad\Rightarrow\quad f(x_1)<f(x_2)$

(E) $a>b>1$，$x<0$ 時，$a^x<b^x$(如：$3>2 \quad\Rightarrow\quad 3^{-2}<2^{-2}$)

應選(C)(D)

4. 下列不等式，何者爲真？

(A) $\log_{\sqrt{2}}\frac{1}{2}<0$　(B) $\log_{0.2}0.3>1$　(C) $\log_{0.2}3>\log_{0.2}\frac{1}{3}$

(D) $0<\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{\sqrt{3}}<1$　(E)$0<\log_4 3<1$

Ans： (A)(E)

解析：

(A) $\log_{\sqrt{2}}\frac{1}{2}=-\log_{\sqrt{2}}2=-\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{2})^2=-2<0$

(B) $\log_{0.2}0.3=\log_{\frac{2}{10}}\frac{3}{10}=\frac{\log 3-1}{\log 2-1}=\frac{1-\log 3}{1-\log 2}<1$

(C) $\log_{0.2}3<0$，$\log_{0.2}\frac{1}{3}=\log_{0.2}3^{-1}=-\log_{0.2}3>0\Rightarrow\quad \log_{0.2}3<\log_{0.2}\frac{1}{3}$

(D) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\log_{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{3}}}{\log_{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}}=\dfrac{-\log_{\sqrt{2}}\sqrt{3}}{-1}=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{3}>1$

(E) $\log_4 3=\frac{\log 3}{\log 4}<1 \quad\Rightarrow\quad 0<\log_4 3<1$

應選(A)(E)

三、填充題

1. $0<a<1$，$n\in N$且$n\geq 2$，令$x=a^{\frac{n+1}{n}}$，$y=a^{\frac{n+1}{n-1}}$，$z=a^{\frac{n-1}{n+1}}$，則x，y，z的大小關係爲__________。

Ans： $y<x<z$

解析：

$0<a<1$ 時，a 的指數愈大，其値愈小，因爲$\frac{n+1}{n-1}>\frac{n+1}{n}>1>\frac{n-1}{n+1}$

所以 $a^{\frac{n+1}{n-1}}<a^{\frac{n+1}{n}}<a^{\frac{n-1}{n+1}}$，即 $y<x<z$

2. 有一種細胞每 20 分鐘分裂一次由一個變成兩個，若有此種細胞 200 個，則經過_______

分鐘，這些細胞分裂後其總數超過一億個。

（已知$\log 2 = 0.3010$）

Ans： 380

解析：每 20 分鐘分裂後，總數爲原來的 2 倍，

欲使 $200 \cdot 2^n > 100000000 = 10^8$，則 $2^n > 5 \cdot 10^5$

即$n\log 2 > 5 + \log 5$，可得$n > \dfrac{5.699}{0.301} \doteqdot 18.93$，$n$最小取 19

亦即 $20 \times 19 = 380$ 分鐘後，細胞超過一億個

3. 不等式$\log_3(\log_{\frac{1}{3}} x) > 2$ 的解爲__________。

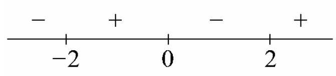
Ans： $0 < x < (\dfrac{1}{3})^9$

解析：$\log_3(\log_{\frac{1}{3}} x) > 2$，此時$\log_{\frac{1}{3}} x > 9 = \log_{\frac{1}{3}}(\dfrac{1}{3})^9$，所以 $0 < x < (\dfrac{1}{3})^9$

4. 不等式$(\log_2 x)^3 > \log_2(x^4)$的解爲__________。

Ans： $\dfrac{1}{4} < x < 1$ 或 $x > 4$

解析：$(\log_2 x)^3 > \log_2(x^4)$時，$\begin{cases} x > 0 \cdots\cdots ① \\ (\log^2 x)3 > 4\log_2 x \cdots\cdots ② \end{cases}$



由②得$(\log_2 x)(\log_2 x - 2)(\log_2 x + 2) > 0$，所以$\log_2 x > 2$ 或 $-2 < \log_2 x < 0$

即$x > 4$ 或$\dfrac{1}{4} < x < 1$，由①與②可知$x > 4$ 或$\dfrac{1}{4} < x < 1$

5. 不等式$\log_4(x^2 - 3x + 2) - 2\log_4(2x - 1) > \dfrac{1}{2}$的解爲__________。

Ans： $\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{5}{7}$

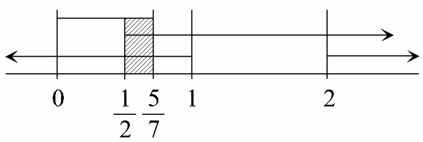
解析：$\log_4(x^2 - 3x + 2) - 2\log_4(2x - 1) > \dfrac{1}{2}$時

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 > 0 \cdots\cdots ① \\ 2x - 1 > 0 \cdots\cdots ② \\ \log_4(x^2 - 3x + 2) - \log_4(2x - 1)2 > \log_4{}^2 \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

(1)由①得$x > 2$ 或$x < 1$；(2)由②得$x > \dfrac{1}{2}$；

(3)由③得$\dfrac{x^2 - 3x + 2}{(2x-1)^2} > 2$，即$x^2 - 3x + 2 > 2(4x^2 - 4x + 1)$，可得 $7x^2 - 5x < 0$

亦即$x(7x - 5) < 0$，所以 $0 < x < \dfrac{5}{7}$



由(1)，(2)，(3)可得$\frac{1}{2} < x < \frac{5}{7}$

6. 不等式$\frac{-2}{5} < \log_{0.125}x + \log_{32}x < \frac{2}{3}$的解爲__________。

Ans：$\frac{1}{32} < x < 8$

解析：$\frac{-2}{5} < \log_{0.125}x + \log_{32}x < \frac{2}{3}$時，$\frac{-2}{5} < \log_{2^{-3}} x + \log_{2^5} x < \frac{2}{3}$

即$\frac{-2}{5} < \frac{1}{-3}\log_2 x + \frac{1}{5}\log_2 x < \frac{2}{3}$，亦即$\frac{-2}{5} < \frac{-2}{15}\log_2 x < \frac{2}{3}$

所以 $-5 < \log_2 x < 3$，因此 $2^{-5} < x < 2^3$，即$\frac{1}{32} < x < 8$

7. 不等式 $3^{2x} + 1 < 3^{x+2} + 3^{x-2}$的解爲__________。

Ans：$-2 < x < 2$

解析：

$3^{2x} + 1 < 3^{x+2} + 3^{x-2}$時，$(3^x)^2 + 1 < 9 \cdot 3^x + \frac{1}{9} \cdot 3^x$

即$(3^x)^2 - \frac{82}{9} \cdot 3^x + 1 < 0$，可知 $9(3^x)^2 - 82 \cdot 3^x + 9 < 0$

此時$(9 \cdot 3^x - 1)(3^x - 9) < 0$，所以$\frac{1}{9} < 3^x < 9$，因此 $-2 < x < 2$

8. 已知x滿足不等式 $2(\log_{\frac{1}{2}} x)^2 + 7\log_{\frac{1}{2}} x + 3 \le 0$，則函數$f(x) = (\log_2 \frac{x}{2}) \cdot (\log_2 \frac{x}{4})$的最小値爲_ 。

Ans：$-\frac{1}{4}$

解析：不等式 $2(\log_{\frac{1}{2}} x)^2 + 7\log_{\frac{1}{2}} x + 3 \le 0$

$\Rightarrow \quad (\log_{\frac{1}{2}} x + 3)(2\log_{\frac{1}{2}} x + 1) \le 0 \quad \Rightarrow \quad -3 \le \log_{\frac{1}{2}} x \le \frac{-1}{2}$

$\Rightarrow \quad (\frac{1}{2})^{-3} \ge x \ge (\frac{1}{2})^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \quad \sqrt{2} \le x \le 8$

$f(x) = (\log_2 \frac{x}{2}) \cdot (\log_2 \frac{x}{4}) = (\log_2 x - 1)(\log_2 x - 2)$

$= (\log_2 x)^2 - 3\log_2 x + 2 = (\log_2 x - \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4} \quad (\sqrt{2} \le x \le 8)$

$\sqrt{2} \le x \le 8 \quad \Rightarrow \quad \log_2 \sqrt{2} \le \log_2 x \le \log_2 8 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \le \log_2 x \le 3$

$\therefore$ 當$\log_2 x = \frac{3}{2}$時，$f(x)$有最小値 $-\frac{1}{4}$

9. 不等式 $5 < 25^x < 125$ 的解爲__________。

Ans：$\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$

解析：$5 < 25^x < 125$ 時，$5^1 < 5^{2x} < 5^3$，因此，$1 < 2x < 3$，即$\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$

10. 不等式$\log_2 x + 2\log_x 2 > 3$的解爲__________。

Ans： $1 < x < 2$ 或 $x > 4$

解析：

$\log_x 2 = \dfrac{1}{\log_2 x}$，令$t = \log_2 x$，則原式化爲$t + \dfrac{2}{t} > 3$

①若$x > 1$，則$t > 0$，則$t^2 - 3t + 2 > 0$

$\Rightarrow$ $(t-1)(t-2) > 0$ $\Rightarrow$ $t < 1$ 或$t > 2$， $\therefore$ $0 < t < 1$ 或$t > 2$

②若 $0 < x < 1$，則$t < 0$，於是$t^2 - 3t + 2 < 0$

$\Rightarrow$ $(t-1)(t-2) < 0$ $\Rightarrow$ $1 < t < 2$ 不合

由①②得 $0 < t < 1$ 或$t > 2$

即 $0 < \log_2 x < 1$ 或$\log_2 x > 2$，故得 $1 < x < 2$ 或$x > 4$

11. 甲、乙兩人同時在不同的銀行存入了十萬元，但他們存款的利率分別是年利率 20%與 8%，如果以複利計算，__________年後甲的本利和就超過乙的本利和的三倍。($\log 1.2 = 0.0792$，$\log 1.08 = 0.0334$，$\log 3 = 0.4771$)

Ans： 11

解析：設甲、乙兩人銀行存款n年後，本利和分別爲 $10^5(1.2)^n$，$10^5(1.08)^n$

欲使 $10^5(1.2)^n > 3[10^5(1.08)^n]$，則 $1.2^n > 3(1.08)^n$

因此$n\log 1.2 > \log 3 + n\log 1.08$，即$n(0.0792 - 0.0334) > 0.4771$

可得$n > 10.4$，所以最少要 11 年後

12. 設 $1 \le x \le 100$，則$y = (\log x)^2 - 6\log x + 3$的最大值爲__________，最小值爲__________。

Ans： 3， -5

解析：$y = (\log x)^2 - 6\log x + 3 = (\log x - 3)^2 - 6$， $1 \le x \le 100$ $\Rightarrow$ $0 \le \log x \le 2$

故$\log x = 0(x = 1)$時，y有最大值 $9 - 6 = 3$

$\log x = 2(x = 100)$時，y有最小值 $1 - 6 = -5$

13. 不等式 $2^{x-1} - 3 \times 2^{2x-1} + 1 < 0$ 的解爲__________。

Ans： $x > 0$

解析：$2^{x-1} - 3 \times 2^{2x-1} + 1 < 0$ $\Rightarrow$ $2^{-1} \cdot 2^x - 3 \cdot 2^{-1} \cdot 2^{2x} + 1 < 0$

令$t = 2^x > 0$，則原式化爲$\dfrac{1}{2}t - \dfrac{3}{2}t^2 + 1 < 0$

即 $3t^2 - t - 2 > 0$ $\Rightarrow$ $(t-1)(3t+2) > 0$ $\Rightarrow$ $t > 1$ 或$t < -\dfrac{2}{3}$ 但$t > 0$

$\therefore$ $t > 1$，即 $2^x > 1 = 2^0$ $\Rightarrow$ $x > 0$

14. 設$f(x) = 4^x - 2^{x-1} + 1$，則當$x =$________時，$f(x)$有最小值 $=$________。

Ans： $x = -2$，$M = \dfrac{15}{16}$

解析：$f(x) = 4^x - 2^{x-1} + 1 = 2^{2x} - 2^{-1} \cdot 2^x + 1$

令$t = 2^x$，則$t > 0$，$f(x) = t^2 - \dfrac{1}{2}t + 1 = (t - \dfrac{1}{4})^2 + \dfrac{15}{16}$

當$t = \dfrac{1}{4}$時，$f(x)$有最小值$\dfrac{15}{16}$，此時 $2^x = \dfrac{1}{4} = 2^{-2}$ $\Rightarrow$ $x = -2$

15. $x > 0$，$x \ne 1$，不等式$\log_x(4x - 3) < 2$的解爲__________。

Ans： $x > 3$

解析：

$\log_x(4x-3) < 2 = \log_x x^2$，$x > 0$，$x \neq 1$

(1)真數大於 0，$4x-3 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > \dfrac{3}{4}$

(2)若$x > 1$，則 $4x-3 < x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2-4x+3 > 0$

$\Rightarrow \quad (x-1)(x-3) > 0 \quad \Rightarrow \quad x < 1$ 或$x > 3 \quad \therefore \quad x > 3$

若 $0 < x < 1$，則 $4x-3 > x^2 \quad \Rightarrow \quad (x-1)(x-3) < 0$

$\Rightarrow \quad 1 < x < 3$ 不合

由(1)，(2)得$x > \dfrac{3}{4}$ 且$x > 3$，即$x > 3$ 爲所求

16. 不等式$\log_{\frac{1}{2}}(\log_3 x) \geq -2$ 的解爲＿＿＿＿＿。

Ans： $1 < x \leq 81$

解析：

真數$x > 0$ 且$\log_3 x > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 1$……①

$\log_{\frac{1}{2}}(\log_3 x) \geq -2 = \log_{\frac{1}{2}}(\dfrac{1}{2})^{-2}$，比較真數，$\log_3 x \leq (\dfrac{1}{2})^{-2} = 4 = \log_3 3^4$

去對數，$x \leq 3^4 = 81$……②

由①、②得 $1 < x \leq 81$

17. $f(x) = 2(\log_2 x)^2 + a\log_2 \dfrac{1}{x^2} + b$，當$x = \dfrac{1}{2}$時，$f(x)$有最小值 1，則數對$(a，b)$之値爲＿＿＿。

Ans： $(a，b) = (-2，3)$

解析：

$f(x) = 2(\log_2 x)^2 + a\log_2 \dfrac{1}{x^2} + b = 2(\log_2 x)^2 - 2a\log_2 x + b$

$= 2[(\log_2 x - \dfrac{a}{2})^2 - \dfrac{a^2}{4}] + b = 2(\log_2 x - \dfrac{a}{2})^2 + b - \dfrac{a^2}{2}$

當$\log_2 x = \dfrac{a}{2}$時，最小値$b - \dfrac{a^2}{2}$

由已知$x = \dfrac{1}{2}$時，有最小値 1，即$\dfrac{a}{2} = \log_2 \dfrac{1}{2} = -1 \quad \Rightarrow \quad a = -2$

且$b - \dfrac{a^2}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad b = 1 + \dfrac{a^2}{2} = 1 + \dfrac{4}{2} = 3$

18. 設$f(x) = 2\log(x-2) - \log(x-3)$，當$x = a$時，$f(x)$有最小値$m$，則$a =$＿＿＿＿＿，$m =$＿＿＿＿＿。

Ans：$a = 4$，$m = \log 4$

解析：

$f(x) = 2\log(x-2) - \log(x-3) = \log\dfrac{(x-2)^2}{x-3}$ 且$x > 3$

令$k=\dfrac{(x-2)^2}{x-3}$，則$x^2-(4+k)x+4+3k=0$

設x之二根爲α，β，則α，$\beta\in R$且$\alpha>3$，$\beta>3$

(1)判別式$(4+k)^2-4(4+3k)\geq 0 \quad\Rightarrow\quad k^2-4k\geq 0\Rightarrow\quad k\leq 0$ 或$k\geq 4$

(2) $\alpha+\beta=4+k>6 \quad\Rightarrow\quad k>2$

(3)$(\alpha-3)(\beta-3)>0 \quad\Rightarrow\quad 3^2-3(4+k)+4+3k>0\Rightarrow\quad 1>0$

由(1)(2)(3)得$k\geq 4$，故$f(x)\geq\log 4$

$\therefore\quad f(x)$最小值$\log 4$，此時$x^2-8x+16=0 \quad\Rightarrow\quad x=4$

19. 設 $0<x<1$，不等式$x^{x^2-4}>x^{3x}$的解爲__________。

Ans： $0<x<1$

解析：

$0<x<1$……①

$x^{x^2-4}>x^{3x} \quad\Rightarrow\quad x^2-4<3x \quad\Rightarrow\quad x^2-3x-4<0$

$\Rightarrow\quad (x+1)(x-4)<0 \quad\Rightarrow\quad -1<x<4$……②

①②交集得 $0<x<1$

20. 不等式 $4^x-2^{x+1}-8<0$ 的解爲__________。

Ans： $x<2$

解析：

$4^x-2^{x+1}-8<0 \quad\Rightarrow\quad 2^{2x}-2\cdot 2^x-8<0\Rightarrow\quad (2^x+2)(2^x-4)<0$ 但 $2^x>0$

$\therefore\quad 2^x+2>0 \quad\Rightarrow\quad 2^x-4<0 \quad\Rightarrow\quad 2^x<2^2 \quad\Rightarrow\quad x<2$

四、 計算題

1. 求解下列對數不等式：

(1) $\log_3 x+\log_3(x-2)\leq 1$。

(2) $\log(x+2)-\log(x-2)>1$。

Ans： (1) $2<x\leq 3$ (2) $2<x<\dfrac{22}{9}$

2. 設x的二次方程式$(x+\log_2 a)^2=16x$有兩相異實根，求實數a範圍？

Ans： $0<a<16$

解析：

由$(x+\log_2 a)^2=16x$，知$x^2+(2\log_2 a-16)x+(\log_2 a)^2=0$

此方程式有兩相異實根的充要條件爲

$(2\log_2 a-16)^2-4\cdot(\log_2 a)^2>0$，即$(\log_2 a-8)^2-(\log_2 a)^2>0$

亦即$(\log_2 a-8+\log_2 a)(\log_2 a-8-\log_2 a)>0$，可得$(2\log_2 a-8)(-8)>0$

所以$\log_2 a-4<0$，即$\log_2 a<4$，得 $0<a<16$

3. 設 $1\leq x\leq 1000$，求$x^{1-\log x}$的最大值與最小值。

Ans： 最大值$\sqrt[4]{10}$，最小值 10^{-6}

解析：

設 $1\leq x\leq 1000$，令$y=x^{1-\log x}$，

則$\log y = (1-\log x)\log x = -(\log x)^2 + \log x = -(\log x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}$

$1 \le x \le 1000$ 時，$0 \le \log x \le 3$

因此，當$\log x = \frac{1}{2}$時，$\log y = \frac{1}{4}$最大，此時y值 $= \sqrt[4]{10}$ 也最大

當$\log x = 3$時，$\log y = -6$ 最小，此時y值 $= 10^{-6}$最小

4. 解不等式：$x^{x^2-4} > 1$。

Ans： $x > 2$ 或 $0 < x < 1$

解析：

(1)當$x > 1$時，$x^2 - 4 > 0$，得$x < -2$ 或$x > 2$，所以$x > 2$

(2)當 $0 < x < 1$ 時，$x^2 - 4 < 0$，得 $-2 < x < 2$，所以 $0 < x < 1$

綜合(1)，(2)得$x > 2$ 或 $0 < x < 1$

5. 解不等式：$9^x + 2 \cdot 3^{x+1} - 16 > 0$。

Ans： $x > \log_3 2$

解析：$9^x + 2 \cdot 3^{x+1} - 16 > 0 \quad \Rightarrow \quad (3^x)^2 + 6 \cdot (3^x) - 16 > 0$

$\Rightarrow \quad (3^x + 8)(3^x - 2) > 0 \quad \Rightarrow \quad 3^x < -8$（不合）或 $3^x > 2$，即$x > \log_3 2$

6. 解下列對數不等式：

(1) $2\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}}(6-x)$。　　(2)$\log(x+1) + \log(x-2) < 0$。

Ans： (1) $0 < x < 2$　(2) $2 < x < \frac{1}{2}(1+\sqrt{13})$

解析：

(1) $2\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}}(6-x) \quad \Rightarrow \quad \log_{\frac{1}{2}} x^2 > \log_{\frac{1}{2}}(6-x)$

即$\begin{cases} x > 0 \\ 6 - x > 0 \\ x^2 < 6 - x \end{cases}$

即 $0 < x < 6$ 且 $-3 < x < 2$，所以 $0 < x < 2$

(2) $\log(x+1) + \log(x-2) < 0 \quad \Rightarrow \quad \log(x+1)(x-2) < 0$

即$\begin{cases} x+1 > 0 \\ x-2 > 0 \\ (x+1)(x-2) < 1 \end{cases}$

即$x > 2$ 且 $\frac{1}{2}(1-\sqrt{13}) < x < \frac{1}{2}(1+\sqrt{13})$

所以 $2 < x < \frac{1}{2}(1+\sqrt{13})$

7. 設$x > 1$，求$f(x) = \log_3 \frac{x^2}{27} - \log_x \frac{\sqrt{x}}{9}$的最小值。

Ans： 最小值爲$\frac{1}{2}$（當 $x = 3$）

8. 設$x \in R$，求$y = (\log x)^2 - 2\log(10x) + 8$ 的最小值。

Ans： 5

解析：

$y=(\log x)^2-2\log(10x)+8=(\log x)^2-2(\log 10+\log x)+8$

$=(\log x)^2-2(1+\log x)+8=(\log x)^2-2(\log x)+6$

$=(\log x-1)^2+5$

當$\log x=1$時（即$x=10$），y有最小値爲 5

9. 設$x\in R$，試求$y=9^{x+1}-3^{x+2}+5$的最小值。

Ans：$\dfrac{11}{4}$

10. 解不等式：$\log_x(4x-3)>2$。

Ans：$1<x<3$ 或$\dfrac{3}{4}<x<1$

解析：討論底數x

(1)當$x>1$時，$\log_x(4x-3)>\log_x x^2$

即 $4x-3>x^2 \quad\Rightarrow\quad x^2-4x+3<0$，與$x>1$取交集，得 $1<x<3$

(2)當 $0<x<1$ 時，$\log_x(4x-3)>\log_x x^2$

即 $0<4x-3<x^2$，得$\dfrac{3}{4}<x<1$ 或$x>3$，與 $0<x<1$ 取交集，得$\dfrac{3}{4}<x<1$

綜合(1)，(2)得 $1<x<3$ 或$\dfrac{3}{4}<x<1$