高雄市明誠中學 高三(上)數學複習測驗 日期：93.03.01					
範圍	Book5-Chap4 平面坐標變換	班級	普三　　班	姓名	
		座號			

一、單選題(每題 8 分)

1.下列各方陣所定義的平面變換，何者為旋轉？

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ (B) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 1\\ 1 & -\sqrt{3}\end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ (D) $\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3 & -4\\ 4 & -3\end{bmatrix}$

(E) $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$

答案：(C)

解析：

轉角 θ 所對應之方陣為 $\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}}\\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 45^\circ & -\sin 45^\circ\\ -\sin 45^\circ & \cos 45^\circ\end{bmatrix}\Rightarrow$ 不表旋轉

(B) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 1\\ 1 & -\sqrt{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 30^\circ & \sin 30^\circ\\ \sin 30^\circ & -\cos 30^\circ\end{bmatrix}\Rightarrow$ 表鏡射而不表旋轉

(C) $\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 90^\circ & \sin 90^\circ\\ -\sin 90^\circ & \cos 90^\circ\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(-90^\circ) & -\sin(-90^\circ)\\ \sin(-90^\circ) & \cos(-90^\circ)\end{bmatrix}\Rightarrow$ 表旋轉 -90°

(D) $\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3 & -4\\ 4 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{bmatrix}\Rightarrow$ 不表旋轉也不表鏡射

(E) $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$表平面上的一般變換 $\Rightarrow$ 不表旋轉

二、填充題(每題 10 分)

1.設 $O(0，0)$，$A(4，2)$為平面上兩點，若$\triangle AOB$ 為正三角形且 B 在第一象限內，則 B 的坐標為__________。

答案：$(2-\sqrt{3}，2\sqrt{3}+1)$

解析：

$\angle AOB=60^\circ$，點 B 為 A 經過 60°旋轉變換後的位置，設 $B(x'，y')$，則

$$\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 60^\circ & -\sin 60^\circ\\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-\sqrt{3}\\ 2\sqrt{3}+1\end{bmatrix}，\therefore\ B(2-\sqrt{3}，2\sqrt{3}+1)$$

2.設平面上有一直線 $L：4x-3y=5$，

(1)若將直線 L，以原點爲中心，作轉角爲 $-30°$ 的旋轉變換，得一新直線 L'，則 L' 之方程式爲__________。

(2)若將直線 L，對直線 $2x-y=0$ 作鏡射變換，得一新直線 L'，則 L' 之方程式爲________。

(3)若將直線 L，沿 x 坐標方向推移 y 坐標的 2 倍，沿 y 坐標方向推移 x 坐標的 -3 倍，得一新直線 L'，則 L' 之方程式爲__________。

答案：(1) $(4\sqrt{3}-3)x-(4+3\sqrt{3})y=10$　(2) $24x-7y+25=0$　(3) $5x+11y+35=0$

解析：

(1)設 L'上之動點 $P'(x'，y')$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}\cos(-30°) & -\sin(-30°)\\ \sin(-30°) & \cos(-30°)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(-30°) & -\sin(-30°)\\ \sin(-30°) & \cos(-30°)\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}x'-y'}{2}\\ \frac{x'+\sqrt{3}y'}{2}\end{bmatrix}$$

由 $4x-3y=5\Rightarrow\ 4\cdot\frac{\sqrt{3}x'-y'}{2}-3\cdot\frac{x'+\sqrt{3}y'}{2}=5$

$\Rightarrow\ (4\sqrt{3}-3)x'-(4+3\sqrt{3})y'=10$，即 L'：$(4\sqrt{3}-3)x-(4+3\sqrt{3})y=10$

(2) θ 爲直線 $2x-y=0$ 之方向角　$\Rightarrow$　$\tan\theta=2$，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$　$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$，$\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$　$\Rightarrow$　$\cos2\theta=-\frac{3}{5}$，$\sin2\theta=\frac{4}{5}$

如(1) $\begin{bmatrix}\cos2\theta & \sin2\theta\\ \sin2\theta & -\cos2\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}$

$\Rightarrow\ \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-3x'+4y'}{5}\\ \frac{4x'+3y'}{5}\end{bmatrix}$代入 L，$4\cdot\frac{-3x'+4y'}{5}-3\cdot\frac{4x'+3y'}{5}=5$

$\Rightarrow\ -24x'+7y'=25\ \Rightarrow\ 24x'-7y'+25=0$，即 L'：$24x-7y+25=0$

(3)按題意：矩陣 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 1\end{bmatrix}\ \Rightarrow\ A^{-1}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow\ \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{x'-2y'}{7}\\ \frac{3x'+y'}{7}\end{bmatrix}$代入 L，$4\cdot\frac{x'-2y'}{7}-3\cdot\frac{3x'+y'}{7}=5$

$\Rightarrow\ -5x'-11y'=35\ \Rightarrow\ 5x'+11y'+35=0$，即 L'：$5x+11y+35=0$

3.平面上有一橢圓Γ：$4x^2+y^2=4$，將Γ 作下列各變換後，得一新曲線Γ'，試分別求Γ'之方程式。

(1)平移向量 $\vec{v}=(1，1)$：__________。

(2)以原點爲中心，旋轉 $45°$：__________。

(3)對直線 $x+y=0$ 作鏡射：__________。

(4)以原點爲中心，x 坐標伸長爲 2 倍，y 坐標伸長爲 3 倍：__________。

(5)沿 x 軸方向推移 y 坐標的 2 倍，沿 y 軸方向推移 x 坐標的 3 倍

：__________。

答案：(1) $4(x-1)^2+(y-1)^2=4$　(2) $5x^2+6xy+5y^2=8$　(3) $x^2+4y^2=4$　(4) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{36}=1$

(5) $13x^2-22xy+17y^2=100$

解析：

(1)設Γ'上之動點 $P'(x'，y')$

$\Rightarrow \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}\Rightarrow \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'-1\\y'-1\end{bmatrix}$

以 $x=x'-1$，$y=y'-1$ 代入Γ：$4x^2+y^2=4\Rightarrow 4(x'-1)^2+(y'-1)^2=4$

即Γ'之方程式爲 $4(x'-1)^2+(y'-1)^2=4$

(2) $\begin{bmatrix}\cos 45° & -\sin 45°\\ \sin 45° & \cos 45°\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}\Rightarrow \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2}\\ -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{x'+y'}{\sqrt2}\\ \frac{-x'+y'}{\sqrt2}\end{bmatrix}$代入$\Gamma$

$\Rightarrow 4(\frac{x'+y'}{\sqrt2})^2+(\frac{-x'+y'}{\sqrt2})^2=4\Rightarrow 4(x'+y')^2+(-x'+y')^2=8\Rightarrow 5x'^2+6x'y'+5y'^2=8$

即Γ'之方程式爲 $5x^2+6xy+5y^2=8$

(3)直線 $x+y=0$ 之方向角 $\theta=135°\Rightarrow \cos2\theta=0$，$\sin2\theta=-1$

$\Rightarrow \begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}\Rightarrow \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-y'\\-x'\end{bmatrix}$

代入Γ $\Rightarrow 4(-y')^2+(-x')^2=4\Rightarrow x'^2+4y'^2=4$

即Γ'之方程式爲 $x^2+4y^2=4$

(4) $\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}\Rightarrow \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac12 & 0\\ 0 & \frac13\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac12 x'\\ \frac13 y'\end{bmatrix}$ 代入Γ

$\Rightarrow 4(\frac12 x')^2+(\frac13 y')^2=4\Rightarrow x'^2+\frac{y'^2}{9}=4\Rightarrow \frac{x'^2}{4}+\frac{y'^2}{36}=1$

即Γ'之方程式爲$\frac{x'^2}{4}+\frac{y'^2}{36}=1$

(5) $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}\Rightarrow \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\frac{1}{-5}\begin{bmatrix}1 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-x'+2y'}{5}\\ \frac{3x'-y'}{5}\end{bmatrix}$代入$\Gamma\Rightarrow 4(\frac{-x'+2y'}{5})^2+(\frac{3x'-y'}{5})^2=4$

$\Rightarrow 4(-x'+2y')^2+(3x'-y')^2=100\Rightarrow 13x'^2-22x'y'+17y'^2=100$

即Γ'之方程式爲 $13x^2-22xy+17y^2=100$

4.設直線 L 在方陣$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$的推移變換下，得一新直線 L'，若 L 之方程式爲 $4x+3y-5=0$，

則 L'之方程式爲__________。

答案：$4x-5y-5=0$

解析：

$$\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+2y\\y\end{bmatrix}$$

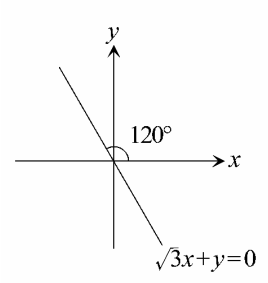
$\Rightarrow \begin{cases}x'=x+2y\\y'=y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=x'-2y'\\y=y'\end{cases}$ 代入 $4x+3y-5=0$

$\Rightarrow 4(x'-2y')+3y'-5=0 \Rightarrow 4x'-5y'-5=0$，即 L' 之方程式為 $4x-5y-5=0$

5.對直線 L：$\sqrt{3}x+y=0$ 鏡射，點 $P(5，4)$經過變換後的點的坐標為__________。

答案：$(\dfrac{-5-4\sqrt{3}}{2}，\dfrac{-5\sqrt{3}+4}{2})$

解析：



直線 L：$\sqrt{3}x+y=0$ 是有向角 120°的終邊所在的直線，令 $\dfrac{\theta}{2}=120°$，則 $\theta=240°$

$P(5，4)$ 以 L 為鏡射軸，變換後的位置為 $Q(x'，y')$

則 $\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 240° & \sin 240°\\ \sin 240° & -\cos 240°\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{-1}{2} & \dfrac{-\sqrt{3}}{2}\\ \dfrac{-\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{-5-4\sqrt{3}}{2}\\ \dfrac{-5\sqrt{3}+4}{2}\end{bmatrix}$

6.在平面上，若點 $P(1，2)$經平移 $\vec{d}=(3，2)$後的位置為 Q，而 Q 再經過以原點為中心，旋轉 30°後的位置為 R，則 Q 的坐標為__________，R 的坐標為__________。

答案：$(4，4)$，$(2\sqrt{3}-2，2+2\sqrt{3})$

解析：

點 $P(1，2)$經過平移 $\vec{d}=(3，2)$的變換得 Q，

Q 的坐標為$(1+3，2+2)=(4，4)$，

Q 經過 30°旋轉後的位置為 R，R 的坐標為$(x''，y'')$，

則 $\begin{bmatrix}x''\\y''\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 30° & -\sin 30°\\ \sin 30° & \cos 30°\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{-1}{2}\\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\sqrt{3}-2\\2+2\sqrt{3}\end{bmatrix}$

7.在坐標平面上，以原點為中心，將點 $P(2，-2)$旋轉 30°，則變換後的點的坐標為__________。

答案：$(\sqrt{3}+1，1-\sqrt{3})$

解析：

若 $P(2，-2)$旋轉 30°後，其結果為 $Q(x'，y')$的位置

則$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sqrt{3}+1 \\ 1-\sqrt{3} \end{bmatrix}$

8.平面上有一定點 P，作下列各種變換後得另一點 $P'(5，2)$，試分別求變換前，此定點 P 的坐標。

(1)平移向量 $\vec{v}=(2，1)$：__________。

(2)以原點爲中心，旋轉 $\tan^{-1}\frac{3}{2}$ ：__________。

(3)對直線 $4x-3y=0$ 作鏡射：__________。

(4)以原點爲中心，縮短爲 $\frac{2}{3}$ 倍：__________。

(5)沿 y 軸方向推移 x 坐標的 2 倍：__________。

答案：(1)(3，1)　(2)$(\frac{16}{\sqrt{13}},\frac{-11}{\sqrt{13}})$　(3)$(\frac{13}{25},\frac{134}{25})$　(4)$(\frac{15}{2},3)$　(5)(5，-8)

解析：

(1)$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$，即 $P(3，1)$

(2) $\theta=\tan^{-1}\frac{3}{2} \Rightarrow \cos\theta=\frac{2}{\sqrt{13}}$，$\sin\theta=\frac{3}{\sqrt{13}}$

$\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{-3}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \\ \frac{-3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{16}{\sqrt{13}} \\ \frac{-11}{\sqrt{13}} \end{bmatrix}$，$\therefore\ P(\frac{16}{\sqrt{13}},\frac{-11}{\sqrt{13}})$

(3)直線 $4x-3y=0$ 之矢角 $\theta \Rightarrow \tan\theta=\frac{4}{3}$，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \cos\theta=\frac{3}{5}$，$\sin\theta=\frac{4}{5} \Rightarrow \cos 2\theta=\frac{-7}{25}$，$\sin 2\theta=\frac{24}{25}$

$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{-7}{25} & \frac{24}{25} \\ \frac{24}{25} & \frac{7}{25} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{13}{25} \\ \frac{134}{25} \end{bmatrix}$，即 $P(\frac{13}{25},\frac{134}{25})$

(4)$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 15 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$，即 $P(\frac{15}{2},3)$

(5)$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ -8 \end{bmatrix}$，即 $P(5，-8)$

9.橢圓 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$ 對直線 $y=x$ 鏡射所得的圖形方程式爲__________。

答案：$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

解析：

設 $P(a，b)$以直線 $y=x$ 爲鏡射軸後的鏡射點 $Q(x_0，y_0)$

則 $x_0=b$ 且 $y_0=a$，因此，當點 P 在橢圓 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$ 時，$\dfrac{a^2}{16}+\dfrac{b^2}{25}=1$，可得 $\dfrac{{y_0}^2}{16}+\dfrac{{x_0}^2}{25}=1$，

即鏡射所得的圖形爲 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$

(2)設 C 點之坐標爲 $C(x，y)$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} x-1 \\ y-2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos 90° & -\sin 90° \\ \sin 90° & \cos 90° \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

或 $\begin{bmatrix} x-1 \\ y-2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$

10.設 $A=\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$， $n\in N$，$k\in R$，$k>0$，若 $A^n=kI$，則 n 之最小值 $=$__________，此時 $k=$__________。

答案：12；4096

解析：

$$A=\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}=2\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}=2\begin{bmatrix} \cos 30° & -\sin 30° \\ \sin 30° & \cos 30° \end{bmatrix}$$

表旋轉 30°後再伸長爲 2 倍

$$I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos 360° & -\sin 360° \\ \sin 360° & \cos 360° \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ n 之最小值 $=12 \quad \Rightarrow \quad A^{12}=2^{12}\cdot I \quad \therefore \quad k=4096$

11.平面上有一定點 $A(1，2)$，作下列各種變換，試分別求變換後，所得 A' 點之坐標。

(1)平移向量 $\vec{v}=(-4，3)$：__________。

(2)以原點爲中心，旋轉 60°：__________。

(3)對直線 $x+2y=0$ 作鏡射：__________。

(4)以原點爲中心，伸長爲 2 倍：__________。

(5)沿 x 軸方向推移 y 坐標的 3 倍：__________。

答案：(1) $(-3，5)$ (2)$\left(\dfrac{1-2\sqrt{3}}{2}，\dfrac{\sqrt{3}+2}{2}\right)$ (3) $(-1，-2)$ (4) $(2，4)$ (5) $(7，2)$

解析：

(1) $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$，即 $A'(-3，5)$

(2) $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos 60° & -\sin 60° \\ \sin 60° & \cos 60° \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1-2\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}+2}{2} \end{bmatrix}$，即 $A'\left(\dfrac{1-2\sqrt{3}}{2}，\dfrac{\sqrt{3}+2}{2}\right)$

(3)直線 $x+2y=0$ 之矢角 θ $\Rightarrow$ $\tan\theta=-\frac{1}{2}$，$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$

$\Rightarrow$ $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$，$\cos\theta=\frac{-2}{\sqrt{5}}$ $\Rightarrow$ $\cos2\theta=\frac{3}{5}$，$\sin2\theta=-\frac{4}{5}$

$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos2\theta & \sin2\theta \\ \sin2\theta & -\cos2\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$，即 $A'(-1，-2)$

(4) $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$，即 $A'(2，4)$

(5) $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$，即 $A'(7，2)$

12.設 $A(4，6)$以 O 爲中心伸縮 2 倍，求變換後的 A' 坐標＿＿＿＿＿＿＿。

答案：$A'(8，12)$

解析：

$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 \\ 12 \end{bmatrix}$

13.設 $A(4,3)$，$B(-5,8)$經平移 $\vec{d}=(3,-1)$後分別得點 A'，B'，試求 A'，B' 的坐標＿＿＿＿＿。

答案：$A'(7，2)$，$B'(-2，7)$

解析：

$A'=A+\vec{d}=(4，3)+(3，-1)=(7，2)$

$B'=B+\vec{d}=(-5，8)+(3，-1)=(-2，7)$

14.設直線 L：$2x+5y-7=0$ 經平移 $\vec{d}=(-3,5)$後得直線 L'，試求 L'的方程式＿＿＿＿＿＿。

答案：$2x+5y-26=0$

解析：

因$(x'，y')=(x，y)+(-3，5)=(x-3，y+5)$

所以$\begin{cases} x=x'+3 \\ y=y'-5 \end{cases}$ 代入直線 L 得 $2(x'+3)+5(y'-5)-7=0$，即 $2x'+5y'-26=0$