高雄市明誠中學 高三(上)數學複習測驗 日期：93.02.20					
範圍	Book5-Chap4 矩陣之四則運算	班級	普三　　班	姓名	
		座號			

一、複選題(每題 10 分)

1.關於方陣的運算，下列敘述何者正確？

(A) $A(B-C)=AB-AC$　(B) $AB=I \Rightarrow BA=I$　(C) $AB=AC$，$A\neq O \Rightarrow B=C$

(D)$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$　(E)$(AB)^3=A^3B^3$

解析：

(A)矩陣之乘法滿足分配律 $A(B+C)=AB+AC$，$A(B-C)=AB-AC$

(B) $AB=I$且A^{-1}存在 $\Rightarrow B=A^{-1} \Rightarrow BA=A^{-1}A=I$

(C) $AB=AC$，$A\neq O$並不能推得$B=C$，必須$\det A\neq 0 \Rightarrow A^{-1}$存在$\Rightarrow A^{-1}(AB)=A^{-1}(AC)$

$\Rightarrow IB=IC \Rightarrow B=C$

(D)$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$注意它的次序

(E)$(AB)^3=AB\cdot AB\cdot AB\neq A^3B^3$，因其不滿足交換律

二、填充題(每題 10 分)

1.設$A=\begin{bmatrix}3&6\\12&9\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}4&-4\\8&-8\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}4&0\\0&1\end{bmatrix}$，$I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，則

(1)$(A+B)-2(A-C)+3(A-2I)=$ ＿＿＿＿＿＿＿；

(2)若方陣X使 $2(A-B)+3(B+X)+4(C-2X)=5I$，則$X=$ ＿＿＿＿＿＿＿。

解析：

(1) $(A+B)-2(A-C)+3(A-2I)=A+B-2A+2C+3A-6I=2A+B+2C-6I$

$=\begin{bmatrix}6&12\\24&18\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4&-4\\8&-8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}8&0\\0&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-6&0\\0&-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12&8\\32&6\end{bmatrix}$

(2) $2(A-B)+3(B+X)+4(C-2X)=5I$ 時，$2A-2B+3B+3X+4C-8X=5I$

即$-5X=5I-2A-B-4C$，亦即 $X=\frac{1}{5}(-5I+2A+B+4C)$

所以 $X=\frac{1}{5}\left(\begin{bmatrix}-5&0\\0&-5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6&12\\24&18\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4&-4\\8&-8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}16&0\\0&4\end{bmatrix}\right)=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}21&8\\32&9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{21}{5}&\frac{8}{5}\\\frac{32}{5}&\frac{9}{5}\end{bmatrix}$

2.設方陣$A=\begin{bmatrix}1&8\\x&y\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&x\\2&y\end{bmatrix}$，$I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，若$A+2B=tI$，則$t=$ ＿＿＿＿＿＿＿，

$5A-2B=$ ＿＿＿＿＿＿＿。

解析：

$A+2B=tI$ 時，$\begin{bmatrix}1&8\\x&y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&2x\\4&2y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&8+2x\\x+4&3y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t&0\\0&t\end{bmatrix}$

因此$\begin{cases}3=t\\8+2x=0\\x+4=0\\3y=t\end{cases}$，所以 $t=3$，$x=-4$，$y=1$，此時 $A=\begin{bmatrix}1&8\\-4&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&-4\\2&1\end{bmatrix}$

因此，$5A-2B=\begin{bmatrix}5&40\\-20&5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2&8\\-4&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&48\\-24&3\end{bmatrix}$

3.設$A=\begin{bmatrix}2&1\\-3&5\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&4\\-4&0\end{bmatrix}$，且 $3(X+A-2B)=X+A$，則$X=$ ＿＿＿＿＿。

解析：

$3(X+A-2B)=X+A$ 時，$3X+3A-6B=X+A$，即 $2X=-2A+6B$

$X=-A+3B=\begin{bmatrix}-2&-1\\3&-5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&12\\-12&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&11\\-9&-5\end{bmatrix}$

4.設$A=\begin{bmatrix}1&-3&2\\2&1&-1\\5&-1&3\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$且$AX=B$，則(1)$A^{-1}=$ ＿＿＿＿＿，(2)$X=$ ＿＿＿＿＿。

解析：

$A=\begin{bmatrix}1&-3&2\\2&1&-1\\5&-1&3\end{bmatrix}$時，利用列運算求$A^{-1}$，如下

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-3&2&1&0&0\\2&1&-1&0&1&0\\5&-1&3&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-3&2&1&0&0\\0&7&-5&-2&1&0\\0&14&-7&-5&0&1\end{array}\right]$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&\frac{-1}{7}&\frac{1}{7}&\frac{3}{7}&0\\0&7&-5&-2&1&0\\0&0&3&-1&-2&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&\frac{-1}{7}&\frac{1}{7}&\frac{3}{7}&0\\0&1&\frac{-5}{7}&\frac{-2}{7}&\frac{1}{7}&0\\0&0&1&\frac{-1}{3}&\frac{-2}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}\quad\frac{5}{7}\quad\frac{1}{7}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&0&\frac{2}{21}&\frac{7}{21}&\frac{1}{21}\\0&1&0&\frac{-11}{21}&\frac{-7}{21}&\frac{5}{21}\\0&0&1&\frac{-1}{3}&\frac{-2}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}，因此A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{2}{21}&\frac{1}{3}&\frac{1}{21}\\\frac{-11}{21}&\frac{-1}{3}&\frac{5}{21}\\\frac{-1}{3}&\frac{-2}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

$$AX=B時，X=A^{-1}B=\begin{bmatrix}\frac{2}{21}&\frac{1}{3}&\frac{1}{21}\\\frac{-11}{21}&\frac{-1}{3}&\frac{5}{21}\\\frac{-1}{3}&\frac{-2}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{7}\\\frac{-2}{7}\\0\end{bmatrix}$$

5.設矩陣$A=\begin{bmatrix}1&-2&1\\-5&2&3\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}-2&1&4\\2&1&2\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}1&2\\3&-1\\0&1\end{bmatrix}$，則

(1)$2(A+3B)-3(2A-B)=$ ＿＿＿＿＿＿，(2)$2AC-3BC=$ ＿＿＿＿＿＿。

解析：

(1) $2(A+3B)-3(2A-B)=2A+6B-6A+3B=-4A+9B$

$$=\begin{bmatrix}-4&8&-4\\20&-8&-12\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-18&9&36\\18&9&18\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-22&17&32\\38&1&6\end{bmatrix}$$

(2) $2AC-3BC=(2A-3B)C=\left(\begin{bmatrix}2&-4&2\\-10&4&6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6&-3&-12\\-6&-3&-6\end{bmatrix}\right)C$

$$=\begin{bmatrix}8&-7&-10\\-16&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\3&-1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-13&13\\-13&-33\end{bmatrix}$$

6.若$A=\begin{bmatrix}1&2&4\\2&6&0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}4&1&4\\0&-1&3\\2&7&5\end{bmatrix}$，則$AB=$ ＿＿＿＿＿＿。

解析：

$$AB=\begin{bmatrix}1&2&4\\2&6&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&1&4\\0&-1&3\\2&7&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12&27&30\\8&-4&26\end{bmatrix}$$

7.求下列兩矩陣積：

(1)$\begin{bmatrix}-1&3&2\\1&2&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}=$ ＿＿＿＿＿＿。(2)$\begin{bmatrix}1&-9&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2\\2&-3\\1&-2\end{bmatrix}=$ ＿＿＿＿＿＿。

解析：

(1)$\begin{bmatrix}-1&3&2\\1&2&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2-3+6\\2-2-9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-9\end{bmatrix}$

(2)$\begin{bmatrix}1&-9&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2\\2&-3\\1&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3-18+3&2+27-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-12&23\end{bmatrix}$

8.設$A=\begin{bmatrix}2&1\\3&b+6\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2&1\\a+b&2a\end{bmatrix}$，且$A=B$，則

(1)$A+B=$ ＿＿＿＿＿＿，(2)$2A-3B=$ ＿＿＿＿＿＿。

解析：

(1) $A=B$ 時，$a+b=3$ 且 $b+6=2a$，因此 $a=3$，$b=0$

即 $A=B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 6\end{bmatrix}$，此時 $A+B=2A=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 6 & 12\end{bmatrix}$

(2) $2A-3B=2A-3A=-A=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ -3 & -6\end{bmatrix}$

9.求方陣$A=\begin{bmatrix}2 & -5\\ -1 & 3\end{bmatrix}$的乘法反元素$A^{-1}=$ ＿＿＿＿＿。

解析：

$A=\begin{bmatrix}2 & -5\\ -1 & 3\end{bmatrix}$時，$|A|=6-5=1$，所以$A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{bmatrix}$

10.若方陣$A=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$且$A^3=I$，且 $0\le\theta\le\pi$，則$\theta=$ ＿＿＿＿＿。

解析：

$A=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$時，$A^3=\begin{bmatrix}\cos3\theta & -\sin3\theta\\ \sin3\theta & \cos3\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，

所以$\begin{cases}\cos3\theta=1\\ \sin3\theta=0\end{cases}$，又 $0\le\theta\le\pi$ 時，$0\le3\theta\le3\pi$，此時 $3\theta=2\pi$，即$\theta=\dfrac{2\pi}{3}$

11.設三階方陣$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 4\\ 1 & 3 & x\end{bmatrix}$，其中$x$爲實數，則(1) A是可逆方陣的充要條件爲＿＿＿＿＿。

(2)若$x=4$，則$A^{-1}=$ ＿＿＿＿＿。

解析：

(1) A可逆的充要條件爲$|A|\ne0$，當$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 4\\ 1 & 3 & x\end{vmatrix}\ne0$ 時，$2x+4+6-4-x-12\ne0$，

則$x\ne6$，所以A可逆的充要條件爲$x\ne6$

(2) $x=4$ 時，$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 4\\ 1 & 3 & 4\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$

$\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 1 & -2 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -2 & 1 & -2 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} & 1 & \frac{-1}{2}\end{bmatrix}$

所以$A^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ \frac{-1}{2} & 1 & \frac{-1}{2}\end{bmatrix}$

12.設兩方陣$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}4 & -2\\ -1 & 5\end{bmatrix}$，又兩方陣$X$，$Y$使 $12X+3Y=4A$，$3X+Y=2B$，則方陣$X=$ ＿＿＿＿＿＿，$X^2=$ ＿＿＿＿＿＿。

解析：

當$\begin{cases}12X+3Y=4A\cdots ①\\ 3X+Y=2B\cdots\cdots ②\end{cases}$時，由① − ② × 3 得 $3X=4A-6B$

即$X=\frac{1}{3}(4A-6B)=\frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix}4 & 0\\ 12 & 8\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}24 & -12\\ -6 & 30\end{bmatrix}\right)=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-20 & 12\\ 18 & -22\end{bmatrix}=\frac{2}{3}\begin{bmatrix}-10 & 6\\ 9 & -11\end{bmatrix}$

$X^2=\left(\frac{2}{3}\begin{bmatrix}-10 & 6\\ 9 & -11\end{bmatrix}\right)^2=\frac{4}{9}\begin{bmatrix}-10 & 6\\ 9 & -11\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-10 & 6\\ 9 & -11\end{bmatrix}=\frac{4}{9}\begin{bmatrix}154 & -126\\ -189 & 175\end{bmatrix}$

因此，$X=\begin{bmatrix}\frac{-20}{3} & 4\\ 6 & \frac{-22}{3}\end{bmatrix}$，$X^2=\begin{bmatrix}\frac{616}{9} & -56\\ -84 & \frac{700}{9}\end{bmatrix}$

14.求下列方陣之積：

(1)$\begin{bmatrix}\cos 5^\circ & -\sin 5^\circ\\ \sin 5^\circ & \cos 5^\circ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos 25^\circ & -\sin 25^\circ\\ \sin 25^\circ & \cos 25^\circ\end{bmatrix}=$ ＿＿＿＿＿＿。(2)$\begin{bmatrix}2 & -2\\ 2 & 2\end{bmatrix}^3=$ ＿＿＿＿＿＿。

解析：

(1)$\begin{bmatrix}\cos(5^\circ+25^\circ) & -\sin(5^\circ+25^\circ)\\ \sin(5^\circ+25^\circ) & \cos(5^\circ+25^\circ)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 30^\circ & -\sin 30^\circ\\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$

(2)因爲$\begin{bmatrix}2 & -2\\ 2 & 2\end{bmatrix}=2\sqrt{2}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}=2\sqrt{2}\begin{bmatrix}\cos 45^\circ & -\sin 45^\circ\\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ\end{bmatrix}$

所以$\begin{bmatrix}2 & -2\\ 2 & 2\end{bmatrix}^3=(2\sqrt{2})^3\begin{bmatrix}\cos 135^\circ & -\sin 135^\circ\\ \sin 135^\circ & \cos 135^\circ\end{bmatrix}=16\sqrt{2}\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-16 & -16\\ 16 & -16\end{bmatrix}$

15.設矩陣$A=\begin{bmatrix}-4 & -6 & 5\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & 3 & -2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\ 0 & -2 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$，且已知$AB=BA$，則$A^2B^2=$ ＿＿＿＿＿＿。

解析：

$$AB=\begin{bmatrix}-4 & -6 & 5\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & 3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\ 0 & -2 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=I$$

所以$A^2B^2=AABB=A(AB)B=AIB=AB=I=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

16.設$A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$，$M=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$，則$M^{-1}AM=$ ＿＿＿＿＿ 。

解析：

$M=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$時，$M^{-1}=\dfrac{1}{-2}\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2}\end{bmatrix}$

所以$M^{-1}AM=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 2\\ 4 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$

17.若方陣X滿足$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}X\begin{bmatrix}3 & -2\\ -5 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -4\\ -3 & 1\end{bmatrix}$，則$X=$ ＿＿＿＿＿ 。

解析：

$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}3 & -2\\ -5 & 3\end{bmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{-1}\begin{bmatrix}3 & 2\\ 5 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & -2\\ -5 & -3\end{bmatrix}$

又$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}X\begin{bmatrix}3 & -2\\ -5 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -4\\ -3 & 1\end{bmatrix}$時，$X=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2 & -4\\ -3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -2\\ -5 & 3\end{bmatrix}^{-1}$

$=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -4\\ -3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & -2\\ -5 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & -9\\ -12 & 14\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & -2\\ -5 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}24 & 13\\ -34 & -18\end{bmatrix}$

18.設二階方陣$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$，$I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，則$A^2-5A+2I=$ ＿＿＿＿＿ 。

解析：

$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$時，$A^2=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 10\\ 15 & 22\end{bmatrix}$

$A^2-5A+2I=\begin{bmatrix}7 & 10\\ 15 & 22\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}5 & 10\\ 15 & 20\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}$