高雄市明誠中學 高三(上)數學複習測驗 日期：93.01.09					
範圍	Book3-Chap3,4 一次方程組、圓、球	班級 座號	普三 班	姓名	

一. 單一選擇題 (每題 10 分)

1、(D) 聯立方程式$\begin{cases}2x-y-z=0\\3x+y-4z=0\\5x-2y+mz=0\end{cases}$ 若除(0,0,0)外尚有其他解時，則常數

$m=$ (A) 2 (B) -2 (C) 3 (D) -3 (E) 4

解析：(D) $\begin{vmatrix}2 & -1 & -1\\3 & 1 & -4\\5 & -2 & m\end{vmatrix}=0$，$5(m+3)=0$ $\therefore m=-3$

2、(B) 圓$2x^2+2y^2-6x+2y-5=0$之中心及半徑為

(A) $(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$; $\sqrt{5}$ (B) $(\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$; $\sqrt{5}$ (C) $(-\frac{3}{2},\frac{1}{2})$; $\sqrt{5}$

(D) $(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$; $\frac{5}{2}$ (E) $(\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$; $\frac{5}{2}$

解析：(B) $2(x-\frac{3}{2})^2+2(y+\frac{1}{2})^2=5+\frac{9}{2}+\frac{1}{2}\Rightarrow(x-\frac{3}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2=5$

二、 填充題 (每題 10 分)

1、設方程組$\begin{cases}(a-1)x+ay=a+2\\4x+(a+3)y=10\end{cases}$，則

(1)當$a=$________時，方程組有無限多組解。(2)當$a=$________時，方程組無解。

答案：3; -1

解析：$\frac{a-1}{4}=\frac{a}{a+3}$，$a=3$或$-1$

(1)當$a=3$時，$\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{5}{10}$有無限多組解 (2)當$a=-1$時，$\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}\neq\frac{1}{10}$無解

2、甲乙丙三人合作一工程，甲乙二人合作 20 天可完工，乙丙二人合作 10 天可完工，而甲丙二人合作 12 天可完工，則甲獨作________日可完工，乙獨作________日可完工。

答案：60; 30

解析：設甲獨作x天可完工，乙獨作y天可完工，丙獨作z天可完工

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{20}\\\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{10}\\\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{12}\end{cases}\quad\therefore\frac{1}{x}=\frac{1}{60},\frac{1}{y}=\frac{1}{30},\frac{1}{z}=\frac{1}{15}\quad\therefore x=60,\ y=30,\ z=15$$

甲獨作 60 天可完工　乙獨作 30 天可完工

3、試解方程組$\begin{cases} x-3y-5z=10 \\ 2x+y-3z=13 \\ 3x+2y-4z=19 \end{cases}$。

答案：

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -5 & 10 \\ 2 & 1 & -3 & 13 \\ 3 & 2 & -4 & 19 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ (-2) \\ (-3) \end{matrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & -5 & 10 \\ 0 & 7 & 7 & -7 \\ 0 & 11 & 11 & -11 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \times(\frac{1}{7}) \\ \times(\frac{1}{11}) \end{matrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -3 & -5 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} (3) \\ \\ (-1) \end{matrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$，表示$\begin{cases} x-2z=7 \\ y+z=-1 \\ 0x+0y+0z=0 \end{cases}$,

令$z=t$，得$\begin{cases} x=7+2t \\ y=-1-t \\ z=t \end{cases}$, t爲任意數，故此方程組有無限多組解。

4、化簡$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}=$______。

答案：0

解析：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix} = 0$

5、空間中相異四點爲$A(0,1,1), B(2,1,4), C(-3,2,1), D(0,2,2)$，則
(1)$\triangle ABC$的面積爲______，(2)四面體$ABCD$的體積爲______。

答案：(1)$\dfrac{\sqrt{94}}{2}$　(2)$\dfrac{7}{6}$

解析：(1) $\overrightarrow{AB}=(2,0,3)$, $\overrightarrow{AC}=(-3,1,0)$, $\overrightarrow{AD}=(0,1,1)$

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-3,-9,2)$　$\therefore \triangle ABC$面積爲$=\dfrac{1}{2}\sqrt{9+81+4}=\dfrac{\sqrt{94}}{2}$

(2)四面體$ABCD=\dfrac{1}{6}\left\|\begin{matrix} 2 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}\right\| = \dfrac{1}{6}\left|(-3,-9,2)\cdot(0,1,1)\right| = \dfrac{7}{6}$

6、設$f(x)=\begin{vmatrix} 2-x & 4 & -3 \\ 2 & 1-x & 0 \\ 1 & -1 & 3-x \end{vmatrix}$，若$f(x)=0$之三根爲$\alpha,\beta,\gamma$則$\alpha+\beta+\gamma=$______,

$\alpha\beta\gamma =$ ______。

答案：6; –9

解析：

$$\begin{vmatrix} 2-x & 4 & -3 \\ 2 & 1-x & 0 \\ 1 & -1 & 3-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (3-x) & 4 & -3 \\ (3-x) & (1-x) & 0 \\ (3-x) & -1 & (3-x) \end{vmatrix} = (3-x)\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 1 & (1-x) & 0 \\ 1 & -1 & (3-x) \end{vmatrix}$$

$$= (3-x)\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & -3-x & 3 \\ 0 & -5 & 6-x \end{vmatrix} = (3-x)\begin{vmatrix} -3-x & 3 \\ -5 & 6-x \end{vmatrix} = (3-x)[(x+3)(x-6)+15]$$

$= (3-x)(x^2-3x-3) \Rightarrow f(x)=0$，其三根 $\alpha=3,\beta,\gamma$，

其中 β,γ 爲 $x^2-3x-3=0$ 二根 $\Rightarrow \begin{cases} \beta+\gamma=3 \\ \beta\gamma=-3 \end{cases}$

$\alpha+\beta+\gamma=3+3=6$，$\alpha\beta\gamma=3\times(-3)=-9$

7、求下列行列式之值

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 9 & 12 & 18 \\ 12 & 18 & 24 \end{vmatrix} =$ ______，(2) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \\ 5 & 6 & 8 \end{vmatrix} =$ ______。

答案：(1)36　(2)0

解析：(1) $\begin{vmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 9 & 12 & 18 \\ 12 & 18 & 24 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 2 & 8 & 1 \\ 9 & 12 & 3 \\ 12 & 18 & 4 \end{vmatrix} = 6\times3\times2\begin{vmatrix} 2 & 8 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 6 & 9 & 2 \end{vmatrix} = 36$

(2) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 7 \\ 5 & 6 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$

8、空間中有三向量 $\overrightarrow{OA}=(3,1,-1)$, $\overrightarrow{OB}=(0,2,1)$, $\overrightarrow{OC}=(1,4,2)$，則由此三向量所張的平行六面體的體積爲______。

答案：3

解析：平行六面體的體積爲 $\left\|\begin{matrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{matrix}\right\| = 3$

9、試證 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-c)(c-a)(a-b)$。

答案：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad (-1)\ (-1)\\
&=\begin{vmatrix} b-a & c-a \\ (b+a)(b-a) & (c+a)(c-a) \end{vmatrix}\\
&=(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix}\\
&=(b-a)(c-a)(c-b)\\
&=(b-c)(c-a)(a-b)
\end{aligned}
$$

10、設三平面 $2x+ay-z=1, 4x-3y+3z=5, 3x+y+z=b$ 相交於一直線 L，則 $a=$______, $b=$______。

答案：5; 3

解析：三平面相交於一直線，及無限多解。

故 $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & a & -1 \\ 4 & -3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \quad \therefore a=5 \qquad \Delta_y=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 3 \\ 3 & b & 1 \end{vmatrix}=0 \quad \therefore b=3$

11、設方程組 $\begin{cases} 3x+4y+5z=kx \\ 3x+4y+5z=ky \\ 3x+4y+5z=kz \end{cases}$ 恰有一解，則 k 值有何限制？______。

答案：$k\neq 0, 12$

解析：方程組 $\begin{cases} (3-k)x+4y+5z=0 \\ 3x+(4-k)y+5z=0 \\ 3x+4y+(5-k)z=0 \end{cases}$ 恰有一解，$\Delta=\begin{vmatrix} (3-k) & 4 & 5 \\ 3 & (4-k) & 5 \\ 3 & 4 & (5-k) \end{vmatrix}\neq 0$

即 $\Rightarrow \begin{vmatrix} (12-k) & 4 & 5 \\ (12-k) & (4-k) & 5 \\ (12-k) & 4 & (5-k) \end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow (12-k)\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 1 & (4-k) & 5 \\ 1 & 4 & (5-k) \end{vmatrix}\neq 0$

$\Rightarrow (12-k)\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & -k \end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow (12-k)\begin{vmatrix} -k & 0 \\ 0 & -k \end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow k^2(12-k)\neq 0$

12、坐標平面上，圓 C 過點 $A(1, 4)$與 $B(0, 3)$，圓心在 x 軸上，則圓 C 方程式爲______。

答案：$(x-4)^2+y^2=25$

解析：設圓心 $C(h, 0) \Rightarrow \overline{CA}=\overline{CB} \Rightarrow (h-1)^2+(0-4)^2=(h-0)^2+(0-3)^2$

$\Rightarrow h=4,$ 半徑 $r=\overline{CA}=\sqrt{(4-1)^2+(0-4)^2}=5$，圓方程式 $(x-4)^2+y^2=25$

13、圓 C 以 $A(-1,2)$與 $B(3,5)$之線段爲直徑，則圓 C 之方程式爲______。

答案：$x^2+y^2-2x-7y+7=0$

解析：直徑式 $(x-3)(x+1)+(y-5)(y-2)=0 \quad \therefore x^2+y^2-2x-7y+7=0$

14、圓 C 上有三點 $A(–1,1)$, $B(3,5)$, $C(5,–1)$，則圓 C 的方程式爲______。

答案：$x^2+y^2-5x-3y-4=0$

解析：設圓方程式爲 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$，$A(–1,1)$, $B(3,5)$, $C(5,–1)$代入

$$\Rightarrow\begin{cases}1+1-d+e+f=0\\9+25+3d+5e+f=0\\25+1+5d-e+f=0\end{cases}\Rightarrow d=-5, e=-3, f=-4$$，

圓方程式爲 $x^2+y^2-5x-3y-4=0$

15、一圓通過 $A(3, 2)$與 $B(–1,4)$兩點並且圓心在直線 $2x+y+3=0$ 上，則此圓的圓心爲______，半徑爲______。

答案：$(–1,–1)$; 5

解析：$\overline{AB}$ 之中垂線爲 $y-3=2(x-1)$ 與 $2x+y+3=0$

相交於圓心 $C(–1,–1)$，半徑 $\overline{CA}=\sqrt{(-1-3)^2+(-1-2)^2}=5$

16、有一圓圓心爲$(–3, 4)$並且通過點$(2, 1)$，求其方程式。

答案：半徑$=\sqrt{(-3-2)^2+(4-1)^2}=\sqrt{34}$， 故圓的方程式爲 $(x+3)^2+(y-4)^2=34$

17、(E) 已知圓 $C:(x-1)^2+(y+3)^2=10$ 與直線 $L: x+ky-2=0$ 相切，則

$k=$(A) -3 (B) $-\frac{1}{3}$ (C) 0 (D) $\frac{1}{3}$ (E) 3

解析：相切$\Rightarrow d(C, L)=r$，$\dfrac{|1-3k-2|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{10}$ $\therefore (k-3)^2=0$ $\therefore k=3$

18、坐標平面上，圓 $C: x^2+y^2+4x+2y-20=0$，圓外一點 $P(2,-6)$，過 P 對圓 C 做切線，切點爲 A, B，則過 P, A, B 三點的圓方程式爲________。

答案：$x^2+y^2+7y+4=0$

解析：過 P, A, B 三點的圓即以 $\overline{PC}$ 爲直徑的圓

方程式爲$(x-2)(x+2)+(y+6)(y+1)=0\Rightarrow x^2+y^2+7y+4=0$

19、有一圓 $C: 4x^2+4y^2-4x+4y+1=0$ 及圓 C 外一點 $P(1,1)$，則點 P 到圓 C 之切線段長爲______。

答案：$\frac{3}{2}$

解析：切線段長 $\sqrt{(1)^2+(1)^2-(1)+(1)+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$

20、設圓 C 的方程式爲 $(x-1)^2+y^2=4$，則過圓 C 外一點 $P(3,5)$與圓 C 相切之直線方程式爲______或______。

答案：$y=\frac{21}{20}x+\frac{37}{20}$； $x=3$

解析：設切線爲 $y-5=m(x-3)$，$\frac{|-2m+5|}{\sqrt{m^2+1}}=2$

$20m=21$　$\therefore m=\frac{21}{20}$　∴切線方程式爲 $y=\frac{21}{20}x+\frac{37}{20}$ 或 $x=3$

21、直線 $L:\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-4}{-1}$ 與球面 $S:(x-2)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9$ 相交於 P, Q 兩點，則此二點坐標爲______和______。

答案：(1,0,3); (5,–2,1)

解析：以 $x=2t-1,\ y=-t+1,\ z=-t+4$ 代入

$\therefore (2t-1-2)^2+(-t+1+2)^2+(-t+4-1)^2=9$，$6t^2-24t+18=0$

$\therefore t=1$ 或 3　∴此二交點爲(1,0,3)和(5,–2,1)

22、由點 $P(2,1,2)$ 對球面 $S:x^2+y^2+z^2+x-3y+z-2=0$ 所作之切線段長爲______。

答案：$2\sqrt{2}$

解析：切線段長爲 $\sqrt{2^2+1^2+2^2+2-3+2-2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

23、設球面 S 之方程式爲 $(x+1)^2+y^2+(z-2)^2=25$，點 $P(2,4,2)$ 在球面 S 上，則過 P 點與球相切之平面方程式爲______。

答案：$3x+4y=22$

解析： 兩次給一次、一次給一半

過 P 點之切平面爲 $(2+1)(x+1)+(4+0)y+(2-2)(z-2)=25 \Rightarrow 3x+4y=22$

24、設平面 $\pi: x+2y+z+2=0$ 截一球面 $S:(x-5)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=10$ 於一圓，則此圓之圓心爲______，圓的半徑爲______。

答案：(4,–3,0); 2

解析：球心到平面 π 之距離爲 $\frac{|5-2+1+2|}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$，球之半徑爲 $\sqrt{10}$

∴圓之半徑爲 $\sqrt{10-6}=2$

設圓心爲 $(5+t,-1+2t,1+t)$ 代入平面 $\pi: x+2y+z+2=0$

$(5+t)+2(-1+2t)+(1+t)+2=0 \Rightarrow t=-1$，所以圓心爲(4,–3,0)