高雄市明誠中學 高三(上)數學複習測驗　　日期：92.12.29					
範圍	Book-Chap2 空間直線、平面	班級	普三　　班	姓名	
		座號			

一、 單選題

1. 兩平面 $2x-y-2z+1=0$，$4x-2y-4z=5$ 的距離爲

(A) 6　(B) $\frac{7}{6}$　(C) 3　(D) 2　(E) $\frac{1}{2}$ 。

Ans： (B)

解析：∵　兩平行平面 $ax+by+cz+d=0$，$ax+by+cz+e=0$ 距離爲 $\frac{|d-e|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

∴　$2x-y-2z+1=0$，$4x-2y-4z=5$ 的距離，

即 $2x-y-2z+1=0$，$2x-y-2z-\frac{5}{2}=0$ 的距離∴　$\frac{1+\frac{5}{2}}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{7}{6}$ 爲所求

2. 設平面 E：$x+y+\sqrt{2}z=1$ 與 x 軸，y 軸，z 軸分別交於 A，B，C 三點，試回答以下問題：

(1)平面 E 與 xz 平面之銳角交角爲(A) $\frac{\pi}{6}$　(B) $\frac{\pi}{4}$　(C) $\frac{\pi}{3}$　(D) $\frac{\pi}{12}$　(E) $\frac{\pi}{8}$

(2)直線 AB 的方程式爲

(A) $\begin{cases} x-y=1 \\ z=0 \end{cases}$　(B) $\begin{cases} x+y=1 \\ z=0 \end{cases}$　(C) $\begin{cases} y-x=1 \\ z=0 \end{cases}$　(D) $\begin{cases} x+y=-1 \\ z=0 \end{cases}$　(E) $\begin{cases} x+z=1 \\ y=0 \end{cases}$

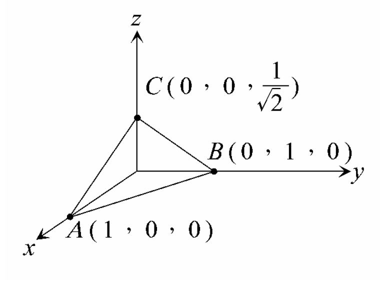
(3)由 A，B，C 三點與原點 O 構成之四面體的體積爲(四面體體積 $=\frac{1}{3}\times$底面積$\times$高)

(A) $\frac{\sqrt{2}}{6}$　(B) $\frac{\sqrt{2}}{12}$　(C) $\frac{\sqrt{2}}{3}$　(D) $\frac{\sqrt{2}}{4}$　(E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(4)原點 O 到平面 E 的距離爲(A) 1　(B) $\frac{1}{4}$　(C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　(D) $\frac{1}{3}$　(E) $\frac{1}{2}$

(5)$\triangle ABC$ 的面積爲(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　(B) $\sqrt{2}$　(C) $\frac{\sqrt{2}}{3}$　(D) $2\sqrt{2}$　(E) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

Ans： (1)(C)　(2)(B)　(3)(B)　(4)(E)　(5)(A)



解析：平面 E：$x+y+\sqrt{2}z=1$ 與 x 軸，y 軸，z 軸交點分別爲

$A(1，0，0)$，$B(0，1，0)$，$C(0，0，\frac{1}{\sqrt{2}})$

(1) E 法線向量 $\vec{n}=(1，1，\sqrt{2})$，xz 平面之法線向量$(0，1，0)$

E 與 xz 平面的銳交角 θ　$\Rightarrow$　$\cos\theta=\frac{0+1+0}{|\vec{n}|\cdot 1}=\frac{1}{2}$，　$\theta=\frac{\pi}{3}$

(2) $\overrightarrow{AB}=(-1，1，0)$，直線 AB 的方程式爲 $\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{1}$，$z=0$　$\Rightarrow$　$\begin{cases} x+y=1 \\ z=0 \end{cases}$

(3)四面體 $OABC$ 的體積 $=\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 1\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{12}$

(4)原點 O 到平面 E 的距離 $=\frac{1}{\sqrt{1+1+2}}=\frac{1}{2}$

(5) $V_{OABC}=\dfrac{1}{3}(\triangle ABC)\cdot d(O，E)$ $\quad\therefore\quad \dfrac{\sqrt{2}}{12}=\dfrac{1}{3}(\triangle ABC)\cdot\dfrac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad \triangle ABC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

3. 已知直線L_1，L_2交於點$A(1，0，-1)$，$L_1\perp L_2$，其中L_1：$\begin{cases}x=1+t\\ y=t\\ z=-1\end{cases}$，$t\in R$，$L_2$：$\begin{cases}x=1+t\\ y=-t\\ z=-1-t\end{cases}$，

$t\in R$，若以L_1為軸，將L_2旋轉一圈得一平面E，則E的方程式為

(A) $x=1$　(B) $y=0$　(C) $x+y-1=0$　(D) $x-y-z=2$　(E) $x+y-3=0$

Ans： (C)

解析：

$\because\quad L_1\perp E$，而L_1：$\begin{cases}x=1+t\\ y=t\\ z=-1\end{cases}$，$t\in R$的方向向量為$(1，1，0)$

$\therefore$　平面E的法線向量為$(1，1，0)$，而$A(1，0，-1)\in E\quad\Rightarrow\quad E：x+y=1$

4. 直線 L：$\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$與下列那一個平面平行？

(A) $2x-y+z=1$　(B) $x+y-z=2$　(C) $3x-y+2z=1$

(D) $3x+2y+z=2$　(E) $x-3y+z=1$

Ans： (B)

解析：設平面 E 的法線向量為$\vec{n}$，則 $L\,/\!/\,E\quad\Leftrightarrow\quad \vec{n}\perp L$

L：$\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$的方向向量為$(3，-1，2)$

本題五個平面中，僅 $x+y-z=2$ 與 L 平行（$\because\quad (1，1，-1)\cdot(3，-1，2)=0$）

5. 設相異兩點A，B都在直線L_1：$\begin{cases}3x-y+z-7=0\\ 2x+y-3z+14=0\end{cases}$上，也都在直線$L_2$：$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-b}{m}=\dfrac{z-c}{n}$

上，m，n，b，$c\in R$，則$m+n$之值為

(A) 5　(B) 6　(C) 11　(D) 16　(E) 17

Ans： (D)

解析：$\overleftrightarrow{AB}=L_1=L_2$

$\begin{array}{cccccc}3 & -1 & 1 & 3 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -3 & 2 & 1 & -3\end{array}\quad\Rightarrow\quad L_1$的方向向量為$(2，11，5)$

$\therefore\quad (2，11，5)=(2，m，n)\quad\Rightarrow\quad m+n=16$

$(\because\quad (1，b，c)\in L_2\quad\therefore\quad (1，b，c)\in L_1)$

$\therefore\quad\begin{cases}3-b+c-7=0\\ 2+b-3c+14=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad b=2，c=6$

6. 兩平面E_1：$x-y+z=8$，E_2：$x+y+\sqrt{6}z=5$的銳夾角θ 為

(A)$\dfrac{\pi}{6}$　(B)$\dfrac{\pi}{4}$　(C)$\dfrac{\pi}{3}$　(D)$\dfrac{5\pi}{12}$　(E)$\dfrac{4\pi}{9}$。

Ans：(C)

解析：取平面E_1的法線向量$\overrightarrow{n_1}=(1，-1，1)$，$E_2$的法線向量為$\overrightarrow{n_2}=(1，1，\sqrt{6})$

$\because$ E_1，E_2的銳夾角為θ $\Rightarrow$ $\pm\overrightarrow{n_1}$，$\overrightarrow{n_2}$ 的銳夾角為θ

$\Rightarrow$ $\cos\theta = \left|\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}\right| = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{8}} = \dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $\theta = 60° = \dfrac{\pi}{3}$

7. 設四點 $A(1，6，2)$，$B(3，5，1)$，$C(4，5，0)$，$D(k，4，2)$共平面，則實數 k 之值為

(A) -1 (B) 1 (C) 2 (D) -2 (E) 3。

Ans： (E)

解析：

$\because$ A，B，C，D 共平面 $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$ 共平面

$\Leftrightarrow$ $(2，-1，-1)$，$(3，-1，-2)$，$(k-1，-2，0)$共平面(四面體 A-BCD 體積為 0)

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \\ k-1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \therefore \quad k = 3$$

8. 平面 π 的 y 截距為 -2，又過點 $A(1，0，1)$，$B(-3，4，1)$，則 π 的 z 截距為

(A)$\dfrac{2}{3}$ (B)$-\dfrac{3}{4}$ (C)$\dfrac{1}{2}$ (D)$-\dfrac{3}{5}$ (E)$\dfrac{4}{5}$。

Ans： (A)

解析：平面 π 的 y 截距為 -2 $\therefore$ π 過點 $C(0，-2，0)$

π 又過 $A(1，0，1)$，$B(-3，4，1)$$\Rightarrow$ π：$x+y-3z+2=0$

令 $x=0$，$y=0$ $\therefore$ $z=\dfrac{2}{3}$ $\therefore$ π 的 z 截距為$\dfrac{2}{3}$

9. 已知點 $A(-1，m，n)$在直線 L：$\dfrac{x+81}{8}=\dfrac{y+108}{11}=\dfrac{z-127}{-13}$上，則實數序對$(m，n)=$

(A)$(2，-3)$ (B)$(2，3)$ (C)$(-2，3)$ (D)$(-4，3)$ (E)$(5，-8)$

Ans：(A)

解析：

$\because$ $A(-1，m，n)\in L$ $\therefore$ $\dfrac{80}{8}=\dfrac{m+108}{11}=\dfrac{n-127}{-13}$

$$\Rightarrow \begin{cases} m+108=110 \\ n-127=-130 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ n=-3 \end{cases}$$

二、多重選擇題

1. 下列那一直線與平面 $2x+y+z-4=0$ 平行？

(A)$\dfrac{x+5}{1}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z+8}{1}$ (B)$\dfrac{x+5}{-1}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z+8}{1}$

(C) $\dfrac{x+5}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+5}{-1}$ (D)$\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z-1}{-1}$ (E) $\begin{cases} 2x-y+z=0 \\ 2x+2y+z=5 \end{cases}$

Ans： (B)(D)(E)

解析：平面 $2x+y+z-4=0$ 的法向量$\vec{n}=(2，1，1)$

(1)$\because$ $\dfrac{x+5}{1}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z+8}{1}$的方向向量$\overrightarrow{u_1}=(1，1，1)$

且 $\vec{n}\cdot\overrightarrow{u_1}=2\cdot1+1+1=4\neq0$， 直線與平面不平行 $\Rightarrow$ (A)不真

(2)$\because$ $\dfrac{x+5}{-1}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z+8}{1}$的方向向量$\overrightarrow{u_2}=(-1，1，1)$，且$\vec{n}\cdot\overrightarrow{u_2}=-2+1+1=0$

$\therefore$ 直線與平面平行 $\Rightarrow$ (B)真

(3)$\because$ $\dfrac{x+5}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+5}{-1}$的方向向量$\overrightarrow{u_3}=(1，1，-1)$，且$\vec{n}\cdot\overrightarrow{u_3}=2+1-1=2\neq0$

$\therefore$ 直線與平面不平行 $\Rightarrow$ (C)不真

(4)$\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z-1}{-1}$的方向向量$\overrightarrow{u_4}=(1，-1，-1)$，且$\vec{n}\cdot\overrightarrow{u_4}=2-1-1=0$

$\therefore$ 直線與平面平行 $\Rightarrow$ (D)真

(5) $\begin{cases}2x-y+z=0\\2x+2y+z=5\end{cases}$的方向向量$\overrightarrow{u_5}=\left(\begin{vmatrix}-1&1\\2&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&2\\1&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2&-1\\2&2\end{vmatrix}\right)=(-3，0，6)$

且$\vec{n}\cdot\overrightarrow{u_5}=-6+0-6=0$， 直線與平面平行 $\Rightarrow$ (E)真

2. 設$A(3，-1，1)$，$B(0，1，-1)$，$C(-1，0，1)$，$D(1，-1，0)$ ，則下列敘述何者正確？

(A)點C到$\overleftrightarrow{BD}$之距離爲$\dfrac{2\sqrt{3}}{2}$ (B)$\triangle BCD$的面積爲$\dfrac{2\sqrt{3}}{2}$ (C)平面BCD的方程式爲 $x+y+z=0$ (D)點A到平面BCD之距離爲$\sqrt{3}$ (E)三角錐$A-BCD$的體積爲$\dfrac{3}{2}$

Ans： (A)(B)(C)(D)(E)

解析：

三、填充題

1. 直線$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-4}{1}$在平面$x+y+az=b$上，數對$(a，b)=$__________

Ans： (1，3)

解析：直線$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-4}{1}$在平面$x+y+az=b$上

(1)$(2，-3，1)\perp(1，1，a)$ $\Rightarrow$ $2-3+a$ $\Rightarrow$ $a=1$

(2)點$(1，-2，4)$在平面上 $\Rightarrow$ $1-2+4a=b\Rightarrow$ $1-2+4=b$ $\Rightarrow$ $b=3$

2. 求過點$A(2，3，1)$與兩平面E_1：$x-y+2z+3=0$，E_2：$2x+y+3z+5=0$ 皆垂直的平面方程式爲__________。

Ans： $5x-y-3z-4=0$

解析：令$\vec{N}=(a，b，c)$， $\overrightarrow{N_1}=(1，-1，2)$， $\overrightarrow{N_2}=(2，1，3)$

$\Rightarrow$ $\begin{cases}a-b+2c=0\\2a+b+3c=0\end{cases}$

$\Rightarrow$ $a=5k，b=-k，c=-3k$ $\Rightarrow$ $\vec{N}=(5，-1，-3)$

$\Rightarrow$ $5(x-2)-(y-3)-3(z-1)=0$ $\Rightarrow$ $5x-y-3z-4=0$

3. 若平面E過點$P(2，3，1)$且在卦限$(+，+，+)$與三坐標平面所成之四面體體積爲最小，則平面E的方程式爲__________。

Ans： $\frac{x}{6}+\frac{y}{9}+\frac{z}{3}=1$

解析：令平面 E 為 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$，點 $P(2，3，1)$ $\Rightarrow$ $\frac{2}{a}+\frac{3}{b}+\frac{1}{c}=1$

$\because$ $a>0，b>0，c>0\Rightarrow$ $\dfrac{\frac{2}{a}+\frac{3}{b}+\frac{1}{c}}{3}\geq\sqrt[3]{\frac{6}{abc}}$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{6}abc\geq 27$

當 $\frac{2}{a}=\frac{1}{3}，\frac{3}{b}=\frac{1}{3}，\frac{1}{c}=\frac{1}{3}$ 時，等號成立$\Rightarrow$ $a=6，b=9，c=3$ $\Rightarrow$ $\frac{x}{6}+\frac{y}{9}+\frac{z}{3}=1$

4. 空間中含 $A(1，0，0)，B(0，1，0)，C(0，0，1)$ 之平面方程式為__________。

Ans： $x+y+z=1$

解析：用截距式得 $\frac{x}{1}+\frac{y}{1}+\frac{z}{1}=1$，即 $x+y+z=1$

5. 設 $A(1，2，3)，B(1，4，2)，C(4，0，3)$，$O$ 為原點，

(1)若 $ABCD$ 為平行四邊形，則 D 點坐標為__________。

(2)$\triangle ABC$ 的面積為__________。

(3)$\triangle ABC$ 所在的平面方程式為__________。

(4)四面體 $OABC$ 的體積為__________。

Ans： (1) $(4，-2，4)$ (2) $\frac{7}{2}$ (3) $2x+3y+6z-26=0$ (4) $\frac{13}{3}$

解析：$A(1，2，3)，B(1，4，2)，C(4，0，3)$

(1) $ABCD$ 為平行四邊形，設 $D(x，y，z)$

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ $\Rightarrow$ $(x-1，y-2，z-3)=(3，-4，1)$， $(x，y，z)=(4，-2，4)$

(2) $\overrightarrow{AB}=(0，2，-1)$， $\overrightarrow{AC}=(3，-2，0)$

$\triangle ABC$ 面積 $=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2\cdot|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$ $=\frac{1}{2}\sqrt{(2^2+1^2)(3^2+2^2)-(-4)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{49}=\frac{7}{2}$

(3)設平面法向量 $\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$，$\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$

$\therefore$ $\begin{cases}2b-c=0\\3a-2b=0\end{cases}$ $\Rightarrow$ $a：b：c=\frac{2}{3}b：b：2b=2：3：6$

$\therefore$ 平面方程式為 $2(x-1)+3(y-2)+6(z-3)=0$，即 $2x+3y+6z-26=0$

(4) $\overrightarrow{OA}=(1，2，3)$， $\overrightarrow{OB}=(1，4，2)$， $\overrightarrow{OA}=(4，0，3)$

四面體 $OABC$ 體積 $=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}1&2&3\\1&4&2\\4&0&3\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{6}\times 2\times 13=\frac{13}{3}$

6. 空間中四點 $A(1，1，2)，B(-1，0，3)，C(2，0，-1)，D(3，k，1)$

(1)過 $A，B，C$ 三點的平面方程式為__________。

(2)若 $A，B，C，D$ 四點共平面，則 $k=$__________。

Ans：(1) $4x-5y+3z-5=0$ (2) 2

解析：(1)設平面 ABC 方程式為 $ax+by+cz+d=0$

$\because$ 過 $A(1，1，2)$ $\therefore$ $a+b+2c+d=0\cdots\cdots$①

過 $B(-1，0，3)$　∴　$-a+3c+d=0\cdots\cdots$②

過 $C(2，0，-1)$　∴　$2a-c+d=0\cdots\cdots$③

解①，②，③得　$a=-\dfrac{4}{5}d$，$b=d$，$c=-\dfrac{3}{5}d$，　平面 ABC 方程式爲 $4x-5y+3z-5=0$

(2) $A，B，C，D$ 共平面　$\Rightarrow$　$D(3，k，1)$在平面 ABC 上，$12-5k+3-5=0$　$\Rightarrow$　$k=2$

7. 過點$A(-2，1，1)$，$B(1，1，3)$的平面E，若與平面F：$x-2y+3z=5$ 垂直，則E的方程式爲＿＿＿＿＿。

Ans：$4x-7y-6z+21=0$

解析：

設平面 E，F 的法線向量各爲 $\overrightarrow{n_1}$，$\overrightarrow{n_2}$，　$E\perp F$　$\Rightarrow$　$\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n_2}$

又 $A，B\in E$　$\Rightarrow$　$\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{AB}$

∴　$\overrightarrow{n_1}$ 爲 $\overrightarrow{n_2}$，$\overrightarrow{AB}$ 的公垂向量

由 $\overrightarrow{n_2}=(1，-2，3)$，$\overrightarrow{AB}=(3，0，2)$

$\Rightarrow$　$\overrightarrow{n_1}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{n_2}=(4，-7，-6)$　∴　E：$4x-7y-6z+21=0$

8. 空間二直線$L:x-3=1-y=z-1$，M：$x-1=a(y+1)=z+b$，若$L\,//\,M$且L與M的距離 $2\sqrt{2}$，則序對$(a，b)=$＿＿＿＿＿。

Ans：$(-1，-1)$

解析：

L：$x-3=\dfrac{y-1}{-1}=z-1$，M：$x-1=\dfrac{y+1}{\frac{1}{a}}=z+b$

(1) $L\,//\,M$　$\Rightarrow$　$\dfrac{1}{a}=-1$　$\Rightarrow$　$a=-1$

(2) L上取一點$A(3，1，1)$，M上取一點$B(1，-1，-b)$，

$\overrightarrow{BA}=(2，2，1+b)$，$L$之方向向量$\vec{v}=(1，-1，1)$

L與M的距離即A點到M的距離，$d(L，M)=d(A，M)=\dfrac{|\overrightarrow{BA}\times\vec{v}|}{|\vec{v}|}$

$$=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix}2 & 1+b\\ -1 & 1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}1+b & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{\sqrt{(-4)^2+(2+1+b)^2+(1+b-2)^2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2b^2+4b+26}}{\sqrt{3}}=2\sqrt{2}$$

∴　$2b^2+4b+26=24$　$\Rightarrow$　$b=-1$

9. 設$A(1，2，3)$，$B(-1，0，1)$，$C(2，-1，0)$爲不共線三點，

(1)平面ABC程式爲＿＿＿＿＿。　(2)△ABC之垂心坐標爲＿＿＿＿＿。

Ans：(1) $y-z+1=0$　(2)$(-\dfrac{1}{4}，\dfrac{1}{8}，\dfrac{9}{8})$

解析：

(1)$\because$ $A(1，2，3)$，$B(-1，0，1)$，$C(2，-1，0)$

$\therefore$ $\overrightarrow{AB}=(-2，-2，-2)$，$\overrightarrow{AC}=(1，-3，-3)$

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(\begin{vmatrix}-2 & -2\\ -3 & -2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-2 & -2\\ -3 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-2 & -2\\ 1 & -3\end{vmatrix})=(0，-8，8)=8(0，-1，1)$

設平面 ABC 之法向量 $\vec{n}$，$\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$，$\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$ $\Rightarrow$ $\vec{n}\ //\ \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

取 $\vec{n}=(0，-1，1)$

$\therefore$ 由點向式知平面 ABC 方程式為 $0(x-1)-(y-2)+(z-3)=0$，即 $y-z+1=0$

(2)設$\triangle ABC$ 的垂心為 $H（x，y，z）$，則 $\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}$

由 $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ $\Rightarrow$ $(x+1，y，z-1)\cdot(1，-3，-3)=0$

$\Rightarrow$ $(x+1)-3y-3(z-1)=0$，$\therefore$ $x-3y-3z+4=0$……①

由 $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ $\Rightarrow$ $(x-2，y+1，z)\cdot(-2，-2，-2)=0$

$\Rightarrow$ $-2(x-2)-2(y+1)-2z=0$，$\therefore$ $x+y+z-1=0$……②

又 $H(x，y，z)$在平面 ABC 上 $\therefore$ $y-z+1=0$……③

②－①得 $4y+4z-5=0$……④

③×4＋④得 $y=\frac{1}{8}$代入③ $z=\frac{9}{8}$再代入②得 $x=-\frac{1}{4}$ $\therefore$ 垂心 $H(-\frac{1}{4}，\frac{1}{8}，\frac{9}{8})$

10. 設三平面E_1：$2x+y-4=0$，E_2：$y+2z=0$，E_3：$3x+2y+3z=6$，若平面E過E_1與E_2之交線，且與平面E_3垂直，則平面E的方程式為＿＿＿＿＿。

Ans： $x-z-2=0$

解析：$\because$ 平面E過平面E_1與E_2的交線

$\therefore$ 令平面E的方程式為 $2x+y-4+k(y+2z)=0\Rightarrow$ $2x+(1+k)y+2kz-4=0$

$\because$ E與E_3：$3x+2y+3z=6$ 垂直$\Rightarrow$ $\therefore$ $(2，1+k，2k)\cdot(3，2，3)=0$

$\Rightarrow$ $6+2(1+k)+6k=0$ $\Rightarrow$ $k=-1$

故平面E的方程式為 $2x-2z-4=0$，即$x-z-2=0$

11. 一平面E過點$A(1，-2，1)$，且與二平面E_1：$x+2y-z+1=0$，E_2：$x-y+z-1=0$ 均垂直，則此平面E的方程式為＿＿＿＿＿。

Ans： $x-2y-3z-2=0$

解析：

設平面E的法向量$\vec{n}$，$\overrightarrow{n_1}=(1，2，-1)$，$\overrightarrow{n_2}=(1，-1，1)$

$\because$ $E\perp E_1$，$E\perp E_2$ $\therefore$ $\vec{n}\perp\overrightarrow{n_2}$，$\vec{n}\perp\overrightarrow{n_2}$ $\Rightarrow$ $\vec{n}\ //\ \overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}$

$\because$ $\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=(\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix})=(1，-2，-3)$

$\therefore$ 取 $\vec{n}=(1，-2，-3)$ $\because$ E過$A(1，-2，1)$

$\therefore$ 平面E的方程式為$(x-1)-2(y+2)-3(z-1)=0$，即$x-2y-3z-2=0$

12. 包含兩點$A(1，1，3)$，$B(-2，1，1)$，且與平面E：$x-2y+3z=6$ 垂直的平面方程式為＿＿＿＿＿。

Ans： $4x-7y-6z+21=0$

解析：$A(1，1，3)$，$B(-2，1，1)\ \Rightarrow\ \overrightarrow{AB}=(-3，0，-2)$

設包含 A，B 且與平面 $E：x-2y+3z=6$ 垂直的平面的法向量 $\vec{n}=(a，b，c)$

則 $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\perp\vec{n}\\(1，-2，3)\perp\vec{n}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(-3，0，-2)\cdot(a，b，c)=0\\(1，-2，3)\cdot(a，b，c)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3a-2c=0\\a-2b+3c=0\end{cases}$

$\therefore\ a：b：c=\begin{vmatrix}0&-2\\-2&3\end{vmatrix}：\begin{vmatrix}-2&-3\\3&1\end{vmatrix}：\begin{vmatrix}-3&0\\1&-2\end{vmatrix}=-4：7：6=4：(-7)：(-6)$

又 $A(1，1，3)$在平面 E 上，故所求平面方程式由點向式得 $4(x-1)-7(y-1)-6(z-3)=0$

即 $4x-7y-6z+21=0$

13. 設$x，y，z$爲實數，若$x+4y-5z+15=0$，則$\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2+(z+4)^2}$之最小值爲__。

Ans： $\sqrt{42}$

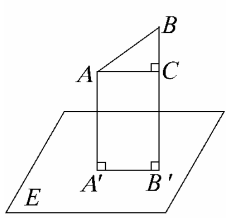
解析：令 $E：x+4y-5z+15=0$，$P(x，y，z)$爲平面上任意點，$A(-1，2，-4)$

則$\overline{PA}=\sqrt{(x+1)^2+(y-2)+(z+4)^2}$ ，$\therefore\ \overline{PA}$的最小值就是 A 點到平面 E 的距離 d

$d=\dfrac{|-1+8+20+15|}{\sqrt{1+16+25}}=\dfrac{42}{\sqrt{42}}=\sqrt{42}$ 爲所求

14. $A(-1，5，3)$，$B(0，10，2)$，平面$E：x-4y-z+6=0$，線段$\overline{AB}$在平面E上正射影的長 $=$__________。

Ans： 3



解析：$A(-1，5，3)$，$B(0，10，2)\ \Rightarrow\ \overline{AB}=\sqrt{1+25+1}=3\sqrt{3}$

A 到平面 E 的距離爲$\dfrac{|-1-20-3+6|}{\sqrt{1+16+1}}=\dfrac{8}{\sqrt{18}}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

B 到平面 E 的距離 $=\dfrac{|0-40-2+6|}{\sqrt{18}}=\dfrac{36}{\sqrt{18}}=2\sqrt{18}=6\sqrt{2}$

A，B 在平面 E 的同側，故$\overline{AB}$在 E 上正射影的長

$\overline{A'B'}=\overline{AC}=\sqrt{(\overline{AB})^2-(\overline{BC})^2}=\sqrt{(3\sqrt{3})^2-(3\sqrt{2})^2}=\sqrt{27-18}=3$

15. 空間三點$A(1，0，1)$，$B(0，1，2)$，$C(2，-1，3)$，平面$E：x+y-2z+4=0$

(1)$\triangle ABC$的面積爲__________。

(2)設平面ABC與平面E的夾角爲θ，則$\cos\theta=$__________。

(3)$\triangle ABC$在平面E上的正射影的面積爲__________。

Ans： (1)$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ (2)$\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (3)$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

解析：$\because\ A(1，0，1)$，$B(0，1，2)$，$C(2，-1，3)$

$\therefore\ \overrightarrow{AB}=(-1，1，1)$，$\overrightarrow{AC}=(1，-1，2)\Rightarrow\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-1-1+2=0$

$\Rightarrow\ \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\left(\begin{vmatrix}1&1\\-1&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&-1\\2&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1&1\\1&-1\end{vmatrix}\right)=(3，3，0)=3(1，1，0)$

(1)$\triangle ABC$ 的面積 $=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{3\times6-0}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

(2)平面 ABC 的法向量 $\vec{u}\,//(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})$，取 $\vec{u}=(1，1，0)$

E 的一個法向量 $\vec{v}=(1，1，-2)$，則 $\cos\theta=\pm\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\pm\dfrac{1+1+0}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(3)$\triangle ABC$ 在平面 E 上正射影的面積 $=(\triangle ABC$ 之面積$)|\cos\theta|=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

16. 設 $E：x-y+z=3$，$F：x+y+z=7$，兩平面夾角爲 θ，則 $\sin\theta=$ ＿＿＿＿＿。

Ans： $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

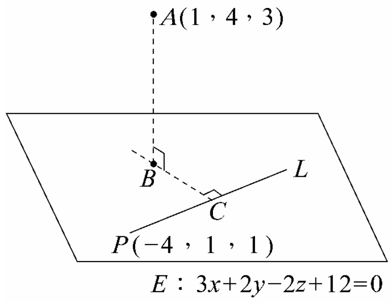
解析：E 法向量 $\overrightarrow{n_1}=(1，-1，1)$，$F$ 法向量 $\overrightarrow{n_2}=(1，1，1)\Rightarrow\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=1$

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}\right)^2}=\frac{\sqrt{|\overrightarrow{n_1}|^2|\overrightarrow{n_2}|^2-(\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2})^2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\frac{\sqrt{3\cdot 3-1^2}}{\sqrt{3}\ \sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

17. 設點 $A(1，4，3)$ 在平面 $E：3x+2y-2z+12=0$ 之投影點爲 B，直線 $L：\dfrac{x+4}{2}=\dfrac{y-1}{a}=\dfrac{z-1}{8}$ 在平面 E 上，點 $P(-4，1，1)$ 在 L 上，過 B 點作 L 垂線與 L 交於 C 點，求

(1) B 點坐標 $=$ ＿＿＿＿＿。 (2) $a=$ ＿＿＿＿＿。 (3) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CP}=$ ＿＿＿＿＿。

Ans： (1) $(-2，2，5)$ (2) 5 (3) 0



解析：(1)設 $B(1+3t，4+2t，3-2t)$，B 在 E 上

$\therefore\quad 3(1+3t)+2(4+2t)-2(3-2t)+12=0$

$\Rightarrow\quad t=-1\quad\therefore\quad B(-2，2，5)$

(2) L 在 E 上， $(2，a，8)\cdot(3，2，-2)=0\ \Rightarrow\ a=5$

(3) $\overline{AB}\perp\overline{BC}$，$\overline{CP}\perp\overline{BC}$，根據三垂線定理 $\overline{AC}\perp\overline{CP}$，

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CP}=0$

18. 直線 $L_1：\dfrac{x-11}{4}=\dfrac{y+5}{-3}=\dfrac{z+7}{-1}$，$L_2：\dfrac{x+5}{3}=\dfrac{y-4}{-4}=\dfrac{z-6}{-2}$ 不共平面，則

(1)包含 L_2 且平行 L_1 之平面方程式爲＿＿＿＿＿

(2)其公垂線 L 與直線 L_1 的交點爲＿＿＿＿＿

(3) L_1，L_2 的公垂線段長爲＿＿＿＿＿。

18. (1) $2x+5y-7z+32=0$ (2)$(3，1，-5)$ (3)$\sqrt{78}$

解析：(1) $(4，-3，-1)\times(3，-4，-2)=(2，5，-7)$

$\therefore$ 包含 L_2 且平行 L_1 之平面 $E：2x+5y-7z+32=0$

$A(11，-5，-7)$ 在 L_1 上 $d(A，E)=\dfrac{|2\times 11+5(-5)-7(-7)+32|}{\sqrt{2^2+5^2+(-7)^2}}=\dfrac{78}{\sqrt{78}}=\sqrt{78}$

$L_1：P(4t+11，-3t-5，-7-t)$，$\overrightarrow{n_1}=(4，-3，-1)$

$L_2：Q(3s-5，-4s+4，-2s+6)$，$\overrightarrow{n_2}=(3，-4，-2)$

$\overrightarrow{PQ}=(3s-4t-16，-4s+3t+9，-2s+t+13)$

$\Rightarrow\quad\dfrac{3s-4t-16}{2}=\dfrac{-4s+3t+9}{5}=\dfrac{-2s+t+13}{-7}\quad\Rightarrow\quad s=2，t=-2$

(2)代入得$P(4(-2)+11，-3(-2)-5，\ -7-(-2))=(3，1，-5)$

(3) $\overrightarrow{PQ}=(-2，-5，7)$，$|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{78}$

19. L_1：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{2-y}{-2}=\dfrac{z+13}{-2}$，$L_2$：$\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+3}{-2}$之距離爲＿＿＿＿＿。

Ans： 6

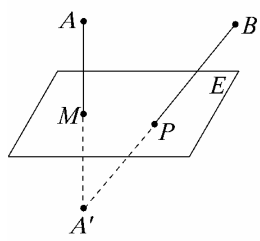
解析：L_1上一點$P(1，2，-13)$，L_2 的方向向量$\vec{V}=(1，2，-2)$與一點$A(2，-2，-3)$

$\overrightarrow{AP}=(-1，4，-10)$，$|\overrightarrow{AP}\times\vec{V}|=|(12，-12，-6)|=18$，$|\vec{V}|=3 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{|\overrightarrow{AP}\times\vec{V}|}{|\vec{V}|}=6$

20. 在空間中，$A(2，1，-4)$，$B(-4，1，5)$，平面E：$x+y+z=5$，動點P在平面上，求$\overline{PA}+\overline{PB}$的最小值＿＿＿＿＿。

Ans： $\sqrt{141}$

解析：



設 A 點對於平面 $E: x+y+z=5$ 之對稱點爲 A'，

則$\overleftrightarrow{AA'}\perp E \quad\Rightarrow\quad \overleftrightarrow{AA'}//(1，1，1)$

∴　直線 AA'之方程式爲$\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+4}{1}$

令 $A'(2+t，1+t，-4+t)$，則$\overline{AA'}$的中點 $M(\dfrac{4+t}{2}，\dfrac{2+t}{2}，\dfrac{-8+t}{2})$

在平面 E 上$\Rightarrow\quad \dfrac{4+t}{2}+\dfrac{2+t}{2}+\dfrac{-8+t}{2}=5 \quad\Rightarrow\quad t=4$

故 A'的坐標爲$(6，5，0)$，則$\overline{PA}+\overline{PB}$的最小值 $=\overline{A'B}\ =\sqrt{100+16+25}=\sqrt{141}$

21. 設L_1：$\dfrac{x-11}{4}=\dfrac{y+5}{-3}=\dfrac{z+7}{-1}$與$L_2$：$\dfrac{x+5}{3}=\dfrac{y-4}{-4}=\dfrac{z-1}{-2}$，則$L_1$與$L_2$的距離爲＿＿＿＿＿。

Ans： $\dfrac{43}{\sqrt{78}}$

解析：∵　L_1：$\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+5}{-3}=\dfrac{z+7}{-1}$的二面式爲$\begin{cases}3x+4y-13=0\\ y-3z-16=0\end{cases}$

∴　包含L_1的平面E的方程式可表爲$(3x+4y-13)+k(y-3z-16)=0$，即

$3x+(4+k)y-3kz-(13+16k)=0$

∵　平面E平行L_2：$\dfrac{x+5}{3}=\dfrac{y-4}{-4}=\dfrac{z-1}{-2}$

∴　平面E的法向量$\vec{n}=(3，4+k，-3k)$與L_2的方向向量$\vec{d}=(3，-4，-2)$垂直

$\Rightarrow\quad \vec{n}\cdot\vec{d}=0 \quad\Rightarrow\quad 9-4(4+k)+6k=0 \quad\Rightarrow\quad k=\dfrac{7}{2}$

∴　E的方程式爲 $3x+\dfrac{15}{2}y-\dfrac{21}{2}z-6=0$，即 $2x+5y-7z-46=0$

∵　$L_2 // E$　∴　L_2上任一點到平面E的距離　L_1，L_2的最短距離爲L_2到平面E的距離

在L_2上取一點$A(-5，4，1)$，則

A點到平面E的距離爲$\dfrac{|2(-5)+5\cdot4-7\cdot1-46|}{\sqrt{4+25+49}}=\dfrac{43}{\sqrt{78}}$，

22. 設直線L_1：$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-2}{2}$，$L_2$：$\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z}{2}$，則$L_1$與$L_2$的距離爲何？

Ans： $\sqrt{5}$

解析：

L_1：$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-2}{2}$，$L_2$：$\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z}{2}$

在L_1上取一點$A(0，0，2)$，則A到L_2的距離即爲L_1與L_2的距離

設在L_2上一點$B(-1+2t，3-t，2t)$，$t\in R$

則$\overrightarrow{AB}$與L_2的方向向量$\vec{v}=(2，-1，2)$垂直，即$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{v}=0$

$\Rightarrow\ (-1+2t，3-t，2t-2)\cdot(2，-1，2)=0$

$\Rightarrow\ 2(-1+2t)-(3-t)+2(2t-2)=0\Rightarrow\ t=1\quad\therefore\ B(1，2，2)$

$\overline{AB}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$ 即爲所求

23. 設L_1：$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+4}{1}$，$L_2$：$\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-5}{1}=\dfrac{z-k}{1}$爲相交兩直線，

(1)$k=$__________。

(2)此二直線L_1與L_2銳角交角的餘弦值爲__________。

(3)直線L_1上離原點最近的點坐標爲__________。

(4)直線L_1上離x軸最近的點坐標爲__________。

Ans： (1)1　(2)$\dfrac{7}{9}$　(3)$(\dfrac{4}{3}，\dfrac{4}{3}，-\dfrac{8}{3})$　(4)$(2，2，-2)$

解析：L_1：$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+4}{1}$，$L_2$：$\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-5}{1}=\dfrac{z-k}{1}$

(1)設兩直線交點P(x，y，z)$\Rightarrow\ \begin{cases} x=t=5s+1\cdots\cdots① \\ y=t=s+5\cdots\cdots② \\ z=t-4=s+k\cdots\cdots③ \end{cases}$

由①，②知 $5s+1=s+5\ \Rightarrow\ s=1\quad\therefore\ t=6$

代入③得 $6-4=1+k\ \Rightarrow\ k=1$

(2)L_1方向向量$\overrightarrow{v_1}=(1，1，1)$，方向向量$\overrightarrow{v_2}=(5，1，1)$

$\therefore\ \cos\theta=\dfrac{|\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2}|}{|\overrightarrow{v_1}||\overrightarrow{v_2}|}=\dfrac{|(1,1,1)\cdot(5,1,1)|}{\sqrt{3}\sqrt{27}}=\dfrac{7}{9}$

(3)設$Q(t，t，t-4)\in L_1$

$\overline{OQ}=\sqrt{t^2+t^2+(t-4)^2}=\sqrt{3t^2-8t+16}=\sqrt{3(t-\dfrac{4}{3})^2+\dfrac{32}{3}}$

$\therefore$ 當$t=\dfrac{4}{3}$時，$\overline{OQ}$有最小值，即$Q(\dfrac{4}{3}，\dfrac{4}{3}，-\dfrac{8}{3})$

(4)設$A(t，t，t-4)\in L_1$，$B(k，0，0)\in x$軸

$\overrightarrow{AB}=(k-t，-t，4-t)$，$\overrightarrow{AB}\perp(1，1，1)$，$\overrightarrow{AB}\perp(1，0，0)$

$\therefore\ \begin{cases} k-t-t+4-v=0 \\ k-t=0 \end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases} t=2 \\ k=2 \end{cases}$，$\therefore\ A(2，2，-2)$

24. 設直線L：$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z+1}{3}$，平面$E$：$x+3y-4z+12=0$，則在平面$E$上有一直線與$L$垂直，設此直線為$\dfrac{x-5}{c}=\dfrac{y-a}{d}=\dfrac{z-b}{7}$，則$a+b+c+d=$ ＿＿＿＿＿＿。

Ans： 12

解析：

L 之方向向量$\vec{\ell}=(2，-1，3)$，E 之法向量$\vec{n}=(1，3，-4)$，$\vec{\ell}\times\vec{n}=(-5，11，7)$

$\therefore$ $c=-5$，$d=11$，$(5，a，b)$ 在 E 上 $\therefore$ $5+3a-4b+12=0\cdots\cdots$①

設 P(x，y，z) 為 L 及另一直線的交點 $\begin{cases} x=1+2t=5-5s\cdots\cdots② \\ y=3-t=a+11s\cdots\cdots③ \\ z=-1+3t=b+7s\cdots\cdots④ \end{cases}$

代入④得 $-1+3t=\dfrac{3}{4}a+\dfrac{17}{4}+7s\cdots\cdots⑤$

由②、③、⑤得 $a=1$ 代入①得 $b=5$， $a+b+c+d=1+5-5+11=12$

25. 原點在直線L：$\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-5}{1}$上投影的坐標為＿＿＿＿＿＿，對稱點坐標為＿＿＿＿＿。

Ans： $(1，-3，4)$；$(2，-6，8)$

解析：設原點 O 在 L：$\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-5}{1}$上的投影 $A(3+2t，-1+2t，5+t)$

則$\overline{OA}\perp L$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{OA}\perp(2，2，1)$

$\Rightarrow$ $(2，2，1)\cdot(3+2t，-1+2t，5+t)=0$

$\Rightarrow$ $2(3+2t)+2(-1+2t)+(5+t)=0$ $\Rightarrow$ $t=-1$

$\therefore$ $A(1,-3,4)$，設 O 的對稱點 B $\Rightarrow$ A 為$\overline{OB}$ 中點 $\therefore$ $B(2,-6,8)$ （$\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OA}$）

26. 設$A(1,0,1)$，$B(2,2,3)$，則$\overline{AB}$ 在平面E：$2x-y-2z-1=0$ 的正射影之長為＿＿＿＿＿＿。

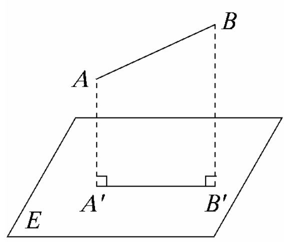
Ans： $\dfrac{\sqrt{65}}{3}$

解析：

如右圖，$\overline{AB}$ 在平面 E 的正射影之長 $=\overline{A'B'}=A$ 到 $\overleftrightarrow{BB'}$ 的距離

$\because$ $\overleftrightarrow{BB'}$ 的方向向量 $=E$ 的法線向量 $=(2，-1，-2)$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{BB'}$：$\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{-2}$， 得 A 到 $\overleftrightarrow{BB'}$ 的距離 $=\dfrac{\sqrt{65}}{3}$



27. $A(4，3，1)$，L：$\begin{cases} x-2y+3=0 \\ x-z=0 \end{cases}$，則含$A$與$L$的平面方程式為＿＿＿。

Ans： $2x-6y+z+9=0$

解析：設所求平面為 $x-2y+3+k(x-z)=0$，$k\in R$

$\because$ 過 $A(4，3，1)$ $\Rightarrow$ $4-6+3+k(4-1)=0$ $\Rightarrow$ $k=-\dfrac{1}{3}$

E：$3(x-2y+3)-(x-z)=0$ $\Rightarrow$ $2x-6y+z+9=0$

28. 包含直線L：$\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{4}$的平面$E$，若與平面$F$：$2x-y+3z+7=0$垂直，則其方程式為__________。

Ans： $10x-y-7z+25=0$

解析：設平面 E，F 的法線向量各為$\overrightarrow{n_1}$，$\overrightarrow{n_2}$，取$\overrightarrow{n_2}=(2，-1，3)$

$\because\ \ E\perp F\ \ \Rightarrow\ \ \overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n_2}$

$\because\ \ L\subset E\ \ \Rightarrow\ \ \overrightarrow{n_1}\perp L$，$L$ 的方向向量為$(3，2，4)$

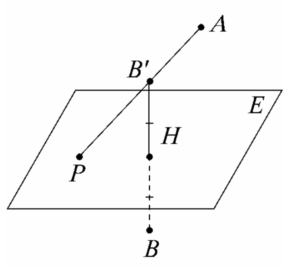
$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 & -1 & 3 \\ & \times & \times & \times & & \\ 3 & 2 & 4 & 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}\qquad \therefore\ \ \overrightarrow{n_2}，L\text{ 的公垂向量 }\overrightarrow{n_2}=(10，-1，-7)$$

E：$10x-y-7z=-25$（$\because$ 點$(-1，1，2)\in E$）

29. 設$A(1，1，1)$，$B(-2，0，1)$，點P在平面E：$x+y+z=0$上移動，則當 $|\overline{PA}-\overline{PB}|$ 最大時，點P之坐標為__________，其最大值為__________。

Ans： $(-\dfrac{5}{2}，\dfrac{1}{2}，2)$，$\sqrt{6}$

解析：



$A(1，1，1)$，$B(-2，0，1)$在平面 E：$x+y+z=0$ 的反側

設 B 對於平面 E 的對稱點為 B'

$\therefore\ \ \overleftrightarrow{BB'}$：$\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{1}$

$\therefore\ \ \overleftrightarrow{BB'}$ 與 E 交於 $H(-\dfrac{5}{3}，\dfrac{1}{3}，\dfrac{4}{3})\ \ \Rightarrow\ \ B'(-\dfrac{4}{3}，\dfrac{2}{3}，\dfrac{5}{3})$

$\overleftrightarrow{AB'}$：$\dfrac{x-1}{7}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-2}$

$\Rightarrow\ \ \overleftrightarrow{AB'}$ 與 E 交於 $P(-\dfrac{5}{2}，\dfrac{1}{2}，2)$，此時 $|\overline{PA}-\overline{PB}|$

$=|\overline{PA}|-|\overline{PB'}|=\overline{AB'}=\sqrt{(\dfrac{7}{3})^2+(\dfrac{1}{3})^2+(\dfrac{2}{3})^2}=\sqrt{6}$ 為最大

30. 點$A(11，4，-6)$到直線L：$\begin{cases} x=4-t \\ y=7+2t \\ z=-1+t \end{cases}$，$t\in R$的距離為__________。

Ans： $\sqrt{29}$

解析：取$P(4-t，7+2t，-1+t)\in L$

$\because\ \overline{AP}^2=(t+7)^2+(-3-2t)^2+(-5-t)^2$

$\qquad=6t^2+36t+83=6(t^2+6t)+83=6(t+3)^2+29\geq 29$

$\therefore\ \ \overline{AP}\ \geq\sqrt{29}\quad\therefore$ 點A到直線L的距離為$\sqrt{29}$

四、計算題

1. 若平面E_1：$x+2y-3z=0$ 與E_2：$3x-2y+z-5=0$ 之交線為L，試求L之參數方程式。

Ans： $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}t+\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{5}{4}t-\dfrac{7}{4}，t\in R \\ z=t \end{cases}$

解析：$\begin{cases} x+2y-3z+3=0 \cdots\cdots ① \\ 3x-2y+z-5=0 \cdots\cdots ② \end{cases}$

由① + ②得 $4x-2z-2=0 \quad \Rightarrow \quad x=\dfrac{1}{2}z+\dfrac{1}{2}$

由① × 3 − ②得 $8y-10z+14=0 \quad \Rightarrow \quad y=\dfrac{5}{4}z-\dfrac{7}{4}$

令 $z=t$，則 L 之參數方程式爲 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}t+\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{5}{4}t-\dfrac{7}{4}，t\in R \\ z=t \end{cases}$

2. 直線 L：$\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{3}$ 及一點 $P(1，-1，2)$決定一平面 E，求平面 E 的方程式。

Ans： $11x-3y-9z+4=0$

解析：

∵ 點 $A(1，2，1)$在 L：$\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{3}$ 上， 平面 E 過 $A(1，2，1)$

設平面 E 之方程式爲 $a(x-1)+b(y-2)+c(z-1)=0 \cdots\cdots ①$

∵ 平面之法向量$(a，b，c)$與 L 的方向向量$(3，2，3)$垂直

故$(a，b，c)\cdot(3，2，3)=0 \quad \Rightarrow \quad 3a+2b+3c=0 \cdots ②$

又平面之法向量與 $\overrightarrow{AM}=(0，-3，1)$垂直

∴ $(a，b，c)\cdot(0，-3，1)=0 \quad \Rightarrow \quad -3b+c=0 \cdots ③$

由②，③ $a：b：c=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}=11：-3：-9$

故由①得平面 E 的方程式爲 $11(x-1)-3(y-2)-9(z-1)=0$，即 $11x-3y-9z+4=0$

3. 空間中點 $A(6，4，1)$爲直線 ℓ：$\dfrac{x-6}{2}=\dfrac{y-4}{-3}=\dfrac{z-1}{6}$ 上一點，平面 π：$19x-4y+8z=8$

(1)求 ℓ 與 π 的交點 B 的坐標。

(2)過 A 點垂直 ℓ 的平面 E，求 π 與 E 的交線方程式。

(3)平面 π 上之點 C 滿足 $\overline{AC}=\overline{AB}$，求當△$ABC$ 面積最大時點 C 的坐標。

Ans： (1)$(4，7，-5)$ (2) $x=0$，$\dfrac{y}{2}=z-1$ (3)$(0，\dfrac{2}{5}，\dfrac{6}{5})$或$(0，6，4)$

解析：

(1) ℓ：$\dfrac{x-6}{2}=\dfrac{y-4}{-3}=\dfrac{z-1}{6}=t \quad \Rightarrow \quad x=2t+6，y=-3t+4，z=6t+1$

代入 π：$19x-4y+8z=8$ 得 $98t+98=0 \quad \Rightarrow \quad t=-1$， 交點$B(4，7，-5)$

(2)過$A(6，4，1)$垂直 ℓ 的平面E之法向量爲$(2，-3，6)$

∴ E：$2(x-6)-3(y-4)+6(z-1)=0$，即 $2x-3y+6z-6=0$

π 與E之交線g：$\begin{cases} 19x-4y+8z=8 \cdots\cdots ① \\ 2x-3y+6z=6 \ \cdots\cdots ② \end{cases}$

①$\times 3-$②$\times 4$ 得 $49x=0 \quad \Rightarrow \quad x=0$ 代入①，②得 $-y+2z=2$

$\therefore$ 交線g：$x=0$，$\dfrac{y}{2}=z-1$

(3)$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AC}\sin A=\dfrac{1}{2}\overline{AB}^2\sin A$

因$\overline{AB}=\overline{AC}$ 爲定値，故$\triangle ABC$面積最大時，$\sin A=1 \Rightarrow \angle A=90°$

又C在g：$x=0$，$\dfrac{y}{2}=z-1$ 上 $\Rightarrow$ $C(0，2(z-1)，z)$

由$\overline{AB}=\overline{AC} \quad \Rightarrow \quad (4-6)^2+(7-4)^2+(-5-1)^2=(0-6)^2+(2z-6)^2+(z-1)^2$

$\Rightarrow \quad 5z^2-26z+24=0 \quad \Rightarrow \quad (5z-6)(z-4)=0 \quad \Rightarrow \quad z=\dfrac{6}{5}，4$

(1) $z=\dfrac{6}{5}$時，$C(0，\dfrac{2}{5}，\dfrac{6}{5})$；(2) $z=4$時，$C(0，6，4)$

4. 已知空間中三點 $A(2，-1，2)$，$B(1，-3，2)$，$C(0，1，1)$，試求點 C 到直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 的距離。

Ans：$\dfrac{\sqrt{205}}{5}$

解析：$\overleftrightarrow{AB}$ 的方向向量即 $\overrightarrow{AB}=(-1，-2，0)$，故 $\overleftrightarrow{AB}$ 的參數式爲$\begin{cases} x=2-t \\ y=-1-2t，t\in R \\ z=2 \end{cases}$

設 $D(2-t，-1-2t，2)$在$\overleftrightarrow{AB}$ 上，且$\overleftrightarrow{CD}\perp\overleftrightarrow{AB}$，則$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

$\therefore \quad (2-t，-2-2t，1)\cdot(-1，-2，0)=0$

$\Rightarrow \quad -2+t+4+4t+0=0 \quad \Rightarrow \quad t=-\dfrac{2}{5}$， $D(\dfrac{12}{5}，-\dfrac{1}{5}，2)$

故 C 點到直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 的距離$\overrightarrow{CD}=\sqrt{(\dfrac{12}{5})^2+(\dfrac{6}{5})^2+1^2}=\dfrac{\sqrt{205}}{5}$

5. 已知直線，L_1：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$ 與L_2：$\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+1}{1}$ 共平面，試求直線L_1與直線L_2的交點坐標。

Ans：$(3，4，0)$

解析：

L_1：$\begin{cases} x=1+t \\ y=2t \\ z=2-t \end{cases}$，$t\in R$，$L_2$：$\begin{cases} x=2+s \\ y=1+3s \\ z=-1+s \end{cases}$，$s\in R$

考慮方程組：$\begin{cases} 1+t=2+s \\ 2t=1+3s \\ 2-t=-1+s \end{cases}$，即$\begin{cases} t-s=1 \cdots\cdots ① \\ 2t-3s=1 \cdots\cdots ② \\ t+s=3 \cdots\cdots ③ \end{cases}$

解①③ $\Rightarrow$ $t=2$，$s=1$，代入②恰滿足

故L_1，L_2的交點坐標爲$(1+2，2\cdot 2，2-2)=(3，4，0)$

6. 設 $A(-2，1，5)$，$B(1，1，2)$，而點 P 在直線 $L：x-3=\dfrac{y-1}{2}=z-2$ 上移動，求△PAB 面積的最小值及此時點 P 之坐標。

Ans： $\sqrt{6}$ ，$(\dfrac{8}{3}，\dfrac{1}{3}，\dfrac{5}{3})$

解析：

取 $P(t+3，2t+1，t+2)$ $\therefore$ $\overrightarrow{AB}=(3，0，-3)$，$\overrightarrow{AP}=(t+5，2t，t-3)$

$\therefore$ △PAB 面積 $=\dfrac{1}{2}\sqrt{\overline{AB}^2\cdot\overline{AP}^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP})^2}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{12(9t^2+6t+3)}=\sqrt{3}\sqrt{9(t+\dfrac{1}{3})^2}\ \geq\sqrt{3}\sqrt{2}=\sqrt{6}$

$\therefore$ △PAB 面積的最小值爲 $\sqrt{6}$ ，此時 $t=-\dfrac{1}{3}$ $\Rightarrow$ $P(\dfrac{8}{3}，\dfrac{1}{3}，\dfrac{5}{3})$

7. 已知點 $A(4，3，1)$，平面 $\pi：x+2y+2z=3$

(1)求 A 點在平面 π 上的垂足坐標，及垂線段長。

(2)平面 π 上以點$(-1，-1，3)$爲中心，半徑 2 的圓 C，點 P 爲圓 C 上動點，求線段 $\overline{AP}$ 長的最大值與 $\overline{AP}$ 最大時點 P 的坐標。

Ans： (1)$(3，1，-1)$，3 (2)$\sqrt{73}$ ，$P(-\dfrac{7}{3}，-\dfrac{5}{3}，\dfrac{13}{3})$

解析：(1)原點 O，A 點在平面 π 上的垂足 H，$\overrightarrow{AH}$ 與 π 的法向量$(1，2，2)$平行

$\therefore$ $\overrightarrow{AH}=t(1，2，2)$（$t\in R$）

$\therefore$ $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AH}=(4+t，3+2t，1+2t)$

H 在平面 π 上 $\Rightarrow$ $(4+t)+2(3+2t)+2(1+2t)=3\Rightarrow$ $t=-1$

$\overrightarrow{OH}=(3，1，-1)$，$|\overrightarrow{AH}|=1\cdot\sqrt{1^2+2^2+2^2}=3$，故垂足 $H(3，1，-1)$，垂線段 $\overline{AH}=3$

(2)平面 π 上圓 C 之中心 $K(-1，-1，3)$，P 爲圓 C 上動點

$\overline{AP}$ 最大時必 $\overline{HP}$ 最大，即 $\overline{HP}$ 通過圓心 K，又 $\overline{HK}=\sqrt{4^2+2^2+4^2}=6$，$\overline{KP}=2$

$\therefore$ $\overline{HP}$ 最大值 $=6+2=8$

此時 $\overline{AP}=\sqrt{\overline{AH}^2+\overline{HP}^2}=\sqrt{3^2+8^2}=\sqrt{73}$ 爲最大

又 $\overline{HK}=3\overline{KP}$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{KP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{HK}=(-\dfrac{4}{3}，-\dfrac{2}{3}，\dfrac{4}{3})$

$\therefore$ $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{KP}=(-\dfrac{7}{3}，-\dfrac{5}{3}，\dfrac{13}{3})$ ，即 $P(-\dfrac{7}{3}，-\dfrac{5}{3}，\dfrac{13}{3})$

8. 設平面 E 過 $A(3，0，0)$，$B(1，0，1)$ 二點且與平面 $2x+y+z=4$ 的銳角交角爲 $\dfrac{\pi}{3}$ ，求平面 E 的方程式。

Ans： $x-y+2z-3=0$ 或 $x+17y+2z-3=0$

解析：$\overrightarrow{AB}=(-2，0，1)$

$\therefore\quad \overleftrightarrow{AB}：\begin{cases} x=3-2t \\ y=0 \\ z=t \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \overleftrightarrow{AB}$的二面式：$\begin{cases} x+2z=3 \\ y=0 \end{cases}$

$\therefore$　設平面E方程式：$x+2z-3+ty=0 \Rightarrow \quad x+ty+2z-3=0$

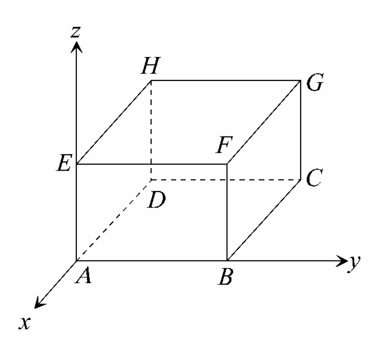
$\therefore\quad \cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{|(2，1，1)\cdot(1，t，2)|}{\sqrt{4+1+1}\sqrt{1+t^2+4}}=\dfrac{|t+4|}{\sqrt{6}\sqrt{t^2+5}}=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow\quad 4(t^2+8t+16)=6(t^2+5) \quad\Rightarrow\quad t^2-16t-17=0$

$\Rightarrow\quad (t+1)(t-17)=0 \quad\Rightarrow\quad t=-1$ 或 17

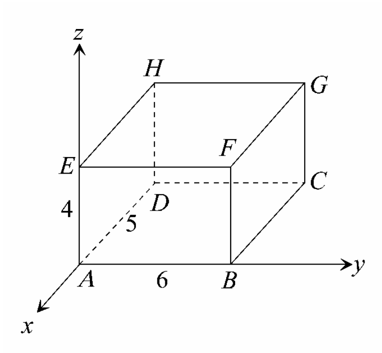
$\therefore$　平面E方程式爲$x-y+2z-3=0$ 或$x+17y+2z-3=0$

9. 如右圖，長方體 $ABCDEFGH$，若$\overline{AB}=6$，$\overline{DH}=4$，$\overline{FG}=5$，試求過點 F 且與$\overline{AG}$垂直的平面方程式。



Ans： $5x-6y-4z+52=0$

解析：



如左圖，令 $A\,(0，0，0)$

則 $F\,(0，6，4)$，$G\,(-5，6，4)$，$\overrightarrow{AG}=(-5，6，4)$

故與$\overrightarrow{AG}$垂直的平面法向量爲$(-5，6，4)$

設此平面方程式爲$-5x+6y+4z=d$

又過點 $F\,(0，6，4)$，則$(-5)\cdot 0+6\cdot 6+4\cdot 4=d \quad\Rightarrow d=52$

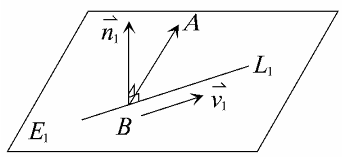
故此平面方程式爲 $-5x+6y+4z=52 \Rightarrow \quad 5x-6y-4z+52=0$

10. 空間中兩歪斜直線L_1：$\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{1}$與$L_2$：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+3}{-1}$及一點$A(a，a，a)$。令$E_1$爲過點$A$且包含直線$L_1$的平面，$E_2$爲過點$A$且包含直線$L_2$的平面。

(1)設$a=1$，則E_1的方程式爲何？　(2)試問a爲何值時，平面E_1與E_2互相垂直？

Ans： (1) $y-2z+1=0$　(2) $a=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{4}$

解析：



L_1：$\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{1}$取一點$B(2，-1，0)$，方向向量 $=(1，2，1)$

L_2：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+3}{-1}$上取一點$C(1，3，-2)$，方向向量 $=(1，2，-1)$

設平面E_1之一法向量$\vec{n_1}=(\ell_1，m_1，n_1)$，平面$E_2$之一法向量$\vec{n_2}=(\ell_2，m_2，n_2)$

因平面E_1包含L_1且通過$A(a，a，a)$　$\therefore\quad \vec{n_1}\perp\overrightarrow{BA}$ 且$\vec{n_1}\perp\vec{v_1}$

$\therefore\quad \begin{cases} (a-2，a+1，a)\cdot(\ell_1，m_1，n_1)=0 \\ (1，2，1)\cdot(\ell_1，m_1，n_1)=0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} (a-2)\ell_1+(a+1)m_1+a\,n_1=0 \\ \ell_1+2m_1+n_1=0 \end{cases}$

$\Rightarrow\quad \ell_1：m_1：n_1=\begin{vmatrix} a+1 & a \\ 2 & 1 \end{vmatrix}：\begin{vmatrix} a & a-1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}：\begin{vmatrix} a-1 & a-3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=(1-a)：2：(a-5)$

因平面E_2包含L_2且通過點$A(a，a，a)$

$\therefore\quad \overrightarrow{n_2} \perp \overrightarrow{CA}$ 且 $\overrightarrow{n_2} \perp \overrightarrow{v_2}$

$\Rightarrow\quad \begin{cases}(a-1)\ell_2+(a-3)m_2+(a+2)n_2=0\\ \ell_2+2m_2+n_2=0\end{cases}$

$\Rightarrow\quad \ell_2:m_2:n_2=\begin{vmatrix}a-3 & a+2\\ 2 & -1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}a+2 & a-1\\ -1 & 1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}a-1 & a-3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=(-3a-1):(2a+1):(a+1)$

(1) $a=1$ 時，取 $\overrightarrow{n_1}=(0，2，-4)$，又 $A(1，1，1)$

$\therefore\quad E_1$的方程式爲 $0\cdot(x-1)+2(y-1)-4(z-1)=0$，即 $y-2z+1=0$

(2) $E_1\perp E_2$時，$\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n_2}$

$\Rightarrow\quad (1-a，2，a-5)\cdot(-3a-1，2a+1，a+1)=0$

$\Rightarrow\quad (1-a)(-3a-1)+2(2a+1)+(a-5)(a+1)=0$

$\Rightarrow\quad 2a^2-a-2=0\quad\Rightarrow\quad a=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{4}$

11. 設平面 E 與平面 F：$3x+6y-2z=12$ 平行且點 $P(1，-1，-2)$到平面 E 的距離爲 2，求平面 E 的方程式。

Ans： $3x+6y-2z=-13$ 或 $3x+6y-2z=15$

解析：

設平面 E 的方程式爲 $3x+6y-2z=d$

則 $P(1，-1，-2)$到平面 E 的距離 $=\dfrac{|3-6+4-d|}{\sqrt{9+36+4}}=2$

$\therefore\quad \dfrac{|1-d|}{7}=2\quad\Rightarrow\quad |1-d|=14\Rightarrow\quad 1-d=\pm 14\quad\Rightarrow\quad d=-13$ 或 15

故平面 E 的方程式爲 $3x+6y-2z=-13$ 或 $3x+6y-2z=15$

12. 設 $A(1，1，0)$，$B(2，1，-1)$，$C(3，2，-2)$，求△ABC 之垂心坐標。

Ans： $(3，-3，-2)$

解析：設垂心 $H(a，b，c)$， $\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow\quad (a-1，b-1，c)\cdot(1，1，-1)=0$，

$(a-2，b-1，c+1)\cdot(-2，-1，2)=0$，

$(a-3，b-2，c+2)\cdot(1，0，-1)=0$

$\Rightarrow\quad a+b-c=2，2a+b-2c=7，a-c=5\Rightarrow\quad a=3，b=-3，c=-2$

$\therefore$ 垂心爲$(3，-3，-2)$

13. 空間中，已知點 $P(2，-1，3)$與平面 E：$x-y+3z=4$，若直線 L 爲通過 P 點且與平面 E 垂直的直線，試求直線 L 的對稱比例式。

Ans： $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-3}{3}$

解析：$\because$ 直線 L 與平面 E 垂直 $\therefore$ 直線 L 的方向向量爲$(1，-1，3)$

故直線 L 的對稱比例式爲 $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-3}{3}$