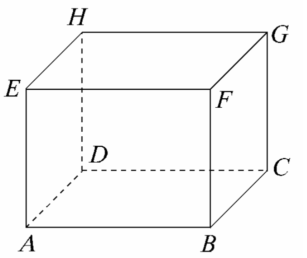
高雄市明誠中學 高三(上)數學複習測驗 日期：92.12.22					
範圍	Book-Chap1,2 平面、空間向量(2)	班級	普三 班	姓名	
		座號			

一、填充題：



1. 如下圖，長方體$ABCD-EFGH$中$\overline{AB}=4$，$\overline{AC}=2$，$\overline{AE}=3$，則 $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{CH}$ = ＿＿＿＿＿＿。

Ans： -7

詳解：建立空間坐標系，令 $D(0，0，0)$，$A(2，0，0)$，$C(0，4，0)$，$H(0，0，3)$，∴ $G(0，4，3)$，

$\overrightarrow{AG}=(-2，4，3)$，$\overrightarrow{CH}=(0，-4，3)$

$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{CH}=(-2，4，3)\cdot(0，-4，3)=0-16+9=-7$

2. 設空間向量$\bar{a}$的方向爲$\alpha，\beta，\gamma，0<\alpha，\beta，\gamma<\pi$，$\csc^2\alpha+9\csc^2\beta+25\csc^2\gamma$ 的最小值爲＿＿＿＿＿＿。

Ans： $\dfrac{81}{2}$

詳解：∵ $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2$

由柯西不等式， $(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma)[(\dfrac{1}{\sin\alpha})^2+(\dfrac{3}{\sin\beta})^2+(\dfrac{5}{\sin\gamma})^2]\geq(1+3+5)^2$

$2(\csc^2\alpha+9\csc^2\beta+25\csc^2\gamma)\geq81\Rightarrow\csc^2\alpha+9\csc^2\beta+25\csc^2\gamma\geq\dfrac{81}{2}$ ∴ 故最小值爲$\dfrac{81}{2}$

3. 設 $|\vec{U}|=3$，$|\vec{V}|=5$，$|\vec{U}+\vec{V}|=7$，求$\vec{U}$ 和$\vec{V}$ 的夾角 =＿＿＿＿＿＿。

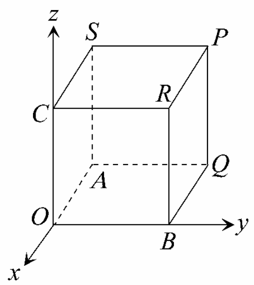
Ans： $60°$

詳解：$|\vec{U}+\vec{V}|^2=(\vec{U}+\vec{V})\cdot(\vec{U}+\vec{V})=|\vec{U}|^2+|\vec{V}|^2+2\vec{U}\cdot\vec{V}$

$\Rightarrow 7^2=3^2+5^2+2\vec{U}\cdot\vec{V}\Rightarrow\vec{U}\cdot\vec{V}=\dfrac{15}{2}$

$\Rightarrow |\vec{U}||\vec{V}|\cos\theta=\dfrac{15}{2}$，$\theta$ 爲$\vec{U}$，$\vec{V}$ 之夾角

$\Rightarrow 3\cdot5\cos\theta=\dfrac{15}{2}\Rightarrow\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ ∴ $\theta=60°$



4. 如右圖所示，正方體各邊(稜)長爲 1，

(1)點P之坐標爲＿＿＿＿。

(2)對角線$\overline{AR}$與$\overline{BS}$的一個夾角爲θ，$\sin\theta$ 之值爲＿＿＿＿＿＿。

(3)點R至平面BCP的距離爲＿＿＿＿＿＿。

Ans： (1)$(-1，1，1)$ (2)$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ (3)$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

詳解：(1)如下圖，$P(-1，1，1)$

(2) $\vec{a}=\overrightarrow{AR}=(1，1，1)$，$\vec{b}=\overrightarrow{BS}=(-1，-1，1)$，$\vec{c}=\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{BS}=(2，2，0)$

$$\cos\theta=\frac{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{c}|^2}{2|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{3+3-8}{2\sqrt{3}\sqrt{3}}=\frac{-1}{3}，\quad \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

(3) $B(0，1，0)$，$C(0，0，1)$，$R(0，1，1)$

設平面 BCP 方程式 $\pi：\frac{x}{m}+\frac{y}{1}+\frac{z}{1}=1$

$P(-1，1，1)$代入得 $m=1 \Rightarrow \pi：x+y+z-1=0$，$d(R，\pi)=\frac{|0+1+1-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

5. 設$P(2，1，7)$，$Q(3，a，5)$，$R(4，5，b)$三點共線，則數對$(a，b)=$__________

Ans： $(3，3)$

詳解：$\frac{3-2}{4-2}=\frac{a-1}{5-1}=\frac{5-7}{b-7} \Rightarrow \frac{a-1}{4}=\frac{-2}{b-7}=\frac{1}{2}$，$a=3$，$b=3$

6. 設$x，y，z\in R$，且滿足$x^2+y^2+z^2=5$，則$x+2y+3z$之最大值爲__________

Ans： $\sqrt{70}$

詳解：$(x+2y+3z)^2\le(x^2+y^2+z^2)(1^2+2^2+3^2)=5\cdot 14=70$

$\therefore$ $x+2y+3z$最大值爲$\sqrt{70}$

二、 計算題

1. $\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6$，$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=-2\sqrt{3}$，$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{BA}=-5$，試求

(1) $|\overrightarrow{BC}|$　　(2)$\triangle ABC$ 之面積

Ans： (1)$\sqrt{7}$　　(2)$\sqrt{13}$

詳解：(1)$|\overrightarrow{BC}|^2=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}=5+2=7$，$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{7}$

(2)$|\overrightarrow{BA}|^2=\overrightarrow{BA}\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})=5+6=11\Rightarrow |\overrightarrow{BA}|=\sqrt{11}$

$$a\triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{BA}|^2\cdot|\overrightarrow{BC}|^2-(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{7\cdot 11-25}=\sqrt{13}$$

2. 設空間向量$\vec{a}=(a_1，a_2，a_3)$，$\vec{b}=(b_1，b_2，b_3)$，$\vec{c}=(c_1，c_2，c_3)$，

其中$a_1，a_2，a_3，b_1，b_2，b_3\in R$

(1)試用向量證明：

$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\le(a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2)$，並求其中等號成立的充要條件。

(2)設$x，y，z$爲正實數且$x+y+z=1$，試求

$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}$的最小值，並求有最小值時的$x，y，z$之值。

Ans：(1) (2)最小值 36，此時 $x=\frac{1}{6}$, $y=\frac{1}{3}$, $z=\frac{1}{2}$

詳解：

(1)$|\vec{a}\cdot\vec{b}|=\left||\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta\right|\le|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$，$\theta$ 爲 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 的夾角，等號成立於 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 平行時

$\therefore\ (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\le(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$，等號成立於 $\vec{a}//\vec{b}$

(2)$(\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z})(x+y+z)\ge(\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{y}}\cdot\sqrt{y}+\frac{3}{\sqrt{z}}\cdot\sqrt{z})^2=36$

$\therefore\ \frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}$ 最小值 36，此時 $\dfrac{\sqrt{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\dfrac{\sqrt{y}}{\frac{2}{\sqrt{y}}}=\dfrac{\sqrt{z}}{\frac{3}{\sqrt{z}}}$

$$\Rightarrow\ \begin{cases}x=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}\\ x+y+z=1\end{cases}\ \Rightarrow\ x=\frac{1}{6},\ y=\frac{1}{3},\ z=\frac{1}{2}$$

3. 有一向量 $\vec{a}$，始點在$(1，-5\sqrt{2}，0)$，$|\vec{a}|=10$，方向角爲 $\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{4}$，$\frac{2\pi}{3}$，試求其終點坐標。

Ans： $(6，0，-5)$

詳解：

設終點坐標爲$(x，y，z)$，則 $a=(x-1，y+5\sqrt{2}，z)=|\vec{a}|(\cos\frac{\pi}{3},\cos\frac{\pi}{4},\cos\frac{2\pi}{3})$

$\therefore\ \dfrac{x-1}{|\vec{a}|}=\cos\dfrac{\pi}{3}\ \Rightarrow\ \dfrac{x-1}{10}=\dfrac{1}{2}\ \Rightarrow\ x=6$，

$\dfrac{y+5\sqrt{2}}{|\vec{a}|}=\cos\dfrac{\pi}{4}\ \Rightarrow\ \dfrac{y+5\sqrt{2}}{10}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ \Rightarrow\ y=0$，

$\dfrac{z}{|\vec{a}|}=\cos\dfrac{2\pi}{3}\ \Rightarrow\ \dfrac{z}{10}=-\dfrac{1}{2}\ \Rightarrow\ z=-5$，

故終點坐標爲$(6，0，-5)$

4. 空間中三點 $A(2，-1，1)$，$B(1，-2，-1)$，$C(4，1，-3)$，試求$\triangle ABC$ 的面積。

Ans： $4\sqrt{2}$

詳解： $\overrightarrow{AB}=(-1，-1，-2)$，$\overrightarrow{AC}=(2，2，-4)$

$\therefore\ \triangle ABC$ 的面積$=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{6\cdot24-16}=\frac{1}{2}\sqrt{128}=4\sqrt{2}$

5. 設有一點 P 及一三角形 ABC，若 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，試求 $a\triangle PAB：a\triangle PBC：a\triangle PCA$。

Ans： 3：1：2

詳解：

$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，改爲以 P 爲起點

$\Rightarrow\ -\overrightarrow{PA}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PA})$

$\Rightarrow\ (1-\frac{1}{3}-\frac{1}{2})\overrightarrow{PA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{PB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{PC}=\vec{0}\Rightarrow\ \overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\vec{0}$

$\therefore\ a\triangle PAB：a\triangle PBC：a\triangle PCA = 3：1：2$

6. 設 x，y，$z \in R$ 且 $\dfrac{(x-1)^2}{16}+\dfrac{(y+2)^2}{5}+\dfrac{(z-3)^2}{4}=1$，求 $x+y+z$ 之最大值，最小值。

Ans： 最大值 7；最小值 -3

詳解：$\because\ \dfrac{(x-1)^2}{16}+\dfrac{(y+2)^2}{5}+\dfrac{(z-3)^2}{4}=1$

由柯西不等式知

$$[4^2+(\sqrt{5})^2+2^2]\left[(\frac{x-1}{4})^2+(\frac{y+2}{\sqrt{5}})^2+(\frac{z-3}{2})^2+\right] \geq$$

$$\left[4\cdot(\frac{x-1}{4})+\sqrt{5}\cdot(\frac{y+2}{\sqrt{5}})+2\cdot\ (\frac{z-3}{2})\right]^2$$

$\Rightarrow\ 25\times 1 \geq (x+y+z-2)^2 \quad \Rightarrow\ 5 \geq |x+y+z-2|$

$\Rightarrow\ -5 \leq x+y+z-2 \leq 5 \quad \therefore\ -3 \leq x+y+z \leq 7$

故 $x+y+z$ 之最大值為 7，最小值為 -3

7. 設 x，y，$z \in R$，$x+y+z=4$，求 x，y，z 之值使 $x^2+y^2+z^2+2x-4y$ 有最小值，並求此最小值。

Ans： $x=0$，$y=3$，$z=1$；-2

詳解：

$\because\ x^2+y^2+z^2+2x-4y=(x+1)^2+(y-2)^2+z^2-5$

由柯西不等式

$(1^2+1^2+1^2)[(x+1)^2+(y-2)^2+(z)^2] \geq [1\cdot(x+1)+1\cdot(y-2)+1\cdot z]^2$

$\Rightarrow\ 3[(x+1)^2+(y-2)^2+(z)^2] \geq (x+y+z-1)^2$

$\because\ x+y+z=4$

$\therefore\ 3[(x+1)^2+(y-2)^2+(z)^2] \geq (4-1)^2$

$\Rightarrow\ (x+1)^2+(y-2)^2+(z)^2 \geq 3 \Rightarrow\ (x+1)^2+(y-2)^2+(z)^2-5 \geq -2$

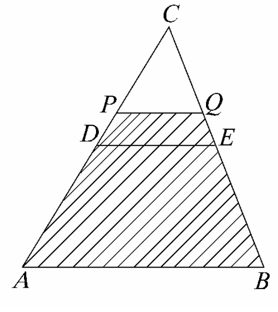
當 $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{1}$ 時，$x^2+y^2+z^2+2x-4y=-2$ 為最小值

$\because\ x+y+z=4 \quad \therefore$ 此時 $x=0$，$y=3$，$z=1$

8. 設 A，B，C 為不共線之三點，P 為平面 ABC 上之動點且滿足 $\alpha\overrightarrow{PA}+\beta\overrightarrow{PB}+\gamma\overrightarrow{PC}=\vec{0}$，其中 α，$\beta \geq 0$，$\alpha+\beta=1$，$0 \leq \gamma \leq 2$，試求動點 P 所形成的區域是什麼？並以圖形表示之。

Ans： 梯形區域

詳解：



$\alpha\overrightarrow{PA}+\beta\overrightarrow{PB}+\gamma\overrightarrow{PC}=\vec{0}$，以 C 為起點

$\Rightarrow\ \alpha(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CP})+\beta(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CP})+\gamma(\overrightarrow{CC}-\overrightarrow{CP})=\vec{0}$

$\Rightarrow\ (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{CP}=\alpha\overrightarrow{CA}+\beta\overrightarrow{CB}$

$\therefore\ \alpha$，$\beta \geq 0$，$\alpha+\beta=1 \quad \Rightarrow\ (1+\gamma)\overrightarrow{CP}=\alpha\overrightarrow{CA}+\beta\overrightarrow{CB}$

(1) $\gamma=0 \quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{CP}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{CB} \quad\Rightarrow\quad$ 表 $\overline{AB}$

(2) $\gamma=1 \quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{CP}=\dfrac{1}{2}(\alpha\overrightarrow{CA}+\beta\overrightarrow{CB}) \quad\Rightarrow\quad$ 表二邊中點之連線 $\overline{DE}$

(3) $\gamma=2 \quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{CP}=\dfrac{1}{3}(\alpha\overrightarrow{CA}+\beta\overrightarrow{CB}) \quad\Rightarrow\quad$ 表 $\overline{PQ}$ 且 $\overline{CP}$ ：$\overline{PA}=\overline{CQ}$ ：$\overline{QB}=1$：2

故於 $0\le\gamma\le 2$ 之條件下，動點 P 所形成的區域是一梯形區域（如上圖）

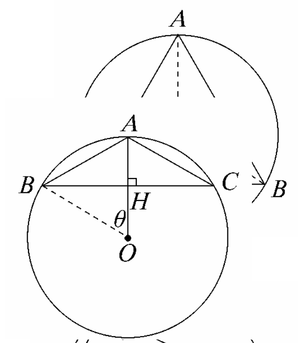
9. $\triangle ABC$ 之外接圓之圓心為 O，半徑為 2，令 $k=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$

(1)若$\triangle ABC$ 為正三角形，試求 k 之值。

(2)若$\triangle ABC$ 為直角三角形，試求 k 之值。

(3)若$\triangle ABC$ 為等腰三角形，且 $k=3$，試求底邊上之高。

Ans： (1) -6　　(2) -4　　(3) $3-\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$



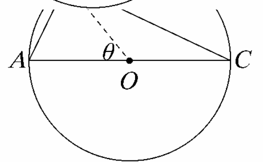
詳解：(1)$\triangle ABC$為正三角形，如右圖：

$\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=\dfrac{2\pi}{3}$ ，$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=2$

$\Rightarrow\quad \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=2\cdot 2\cos120^\circ=-2$

$\therefore\quad k=-6$

(2)$\triangle ABC$為直角三角形，如右圖：



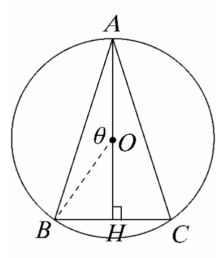
令$\angle B=\dfrac{\pi}{2}$ ，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=2\cdot 2\cos180^\circ=-4$

令$\angle AOB=\theta \quad\Rightarrow\quad \angle BOC=\pi-\theta$

$\Rightarrow\quad \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=2\cdot 2[\cos\theta+\cos(\pi-\theta)]=0$

$\therefore\quad k=-4+0=-4$

(3)$\triangle ABC$為等腰三角形，如右圖



$\because\quad \overline{AB}=\overline{AC} \quad\therefore\quad$ 可令$\angle AOB=\angle BOC=\theta$

$\Rightarrow\quad \angle BOC=2\pi-2\theta$

$\Rightarrow\quad \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=2\cdot 2\cos\theta=4\cos\theta$

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=2\cdot 2\cos\theta(2\pi-2\theta)=4\cos2\theta$

由$k=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=3$

$\Rightarrow\quad 4\cos2\theta+4\cos\theta+4\cos\theta=3$

$\Rightarrow\quad 4(2\cos^2\theta-1)+8\cos\theta=3 \quad\Rightarrow\quad 8\cos^2\theta+8\cos\theta=3$

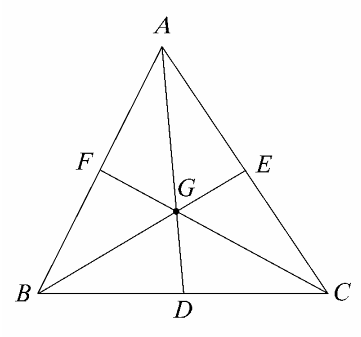
$\Rightarrow\quad \cos\theta=\dfrac{-2+3\sqrt{2}}{4}$（$\because\quad -1\le\cos\theta\le 1$）

$\because\quad \cos\theta>0 \quad\Rightarrow\quad \angle A$為鈍角，如右圖：

$\Rightarrow\quad \overline{AH}=\overline{OA}-\overline{OH}=2-2\cos\theta \;=2-2\cdot\dfrac{-2+3\sqrt{2}}{4}=3-\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$

10. 設 A，B，C 爲相異三點，若 $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ ，且 $|\overrightarrow{GA}|=2$，$|\overrightarrow{GB}|=6$，$|\overrightarrow{GC}|=2\sqrt{7}$ ，求 $\overline{AB}=$？$\triangle ABC$ 面積 $=$？

Ans： $\sqrt{52}$ ，$9\sqrt{3}$



詳解：

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0} \quad \Rightarrow \quad G$爲$\triangle ABC$之重心

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=-\overrightarrow{GC} \quad \Rightarrow \quad |\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}|^2=|-\overrightarrow{GC}|^2$

$\Rightarrow \quad 4+2\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}+36=28 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}=-6$

又 $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}=|\overrightarrow{GA}|\cdot|\overrightarrow{GB}|\cdot\cos\theta=2\cdot 6\cdot\cos\theta=-6$

$\Rightarrow \quad \cos\theta=-\dfrac{1}{2} \quad \therefore \quad \theta=120°$

$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}|^2=|\overrightarrow{AG}|^2+2\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GB}+|\overrightarrow{GB}|^2=4+2\cdot 2\cdot 6\cdot\cos 60°+36=52$

$\therefore \quad \overline{AB}=\sqrt{52}$

又$\sin\theta=\sin 120°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ，$\therefore \quad \triangle ABC$面積 $=3\triangle GAB$面積 $=3\times\dfrac{1}{2}\times 2\times 6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}$

11. 空間中一向量 $\vec{a}$ 與 x 軸，y 軸，z 軸正向之夾角依次爲α，β，γ（α，β，γ 均非象限角），求 $\dfrac{1}{\sin^2\alpha}+\dfrac{4}{\sin^2\beta}+\dfrac{9}{\sin^2\gamma}$ 的最小値。

Ans： 18

詳解：由柯西不等式

$[(\dfrac{1}{\sin\alpha})^2+(\dfrac{2}{\sin\beta})^2+(\dfrac{3}{\sin\gamma})^2](\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma)$

$\geq \ (\dfrac{1}{\sin\alpha}\cdot\sin\alpha+\dfrac{2}{\sin\beta}\cdot\sin\beta+\dfrac{3}{\sin\gamma}\cdot\sin\gamma)^2$

$\Rightarrow \quad (\dfrac{1}{\sin^2\alpha})+(\dfrac{4}{\sin^2\beta})+(\dfrac{9}{\sin^2\gamma})](\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma)\geq(1+2+3)^2$

$\because \quad \sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2 \quad \therefore \quad 2\,(\dfrac{1}{\sin^2\alpha}+\dfrac{4}{\sin^2\beta}+\dfrac{9}{\sin^2\gamma})\geq 36$

$\Rightarrow \quad (\dfrac{1}{\sin^2\alpha}+\dfrac{4}{\sin^2\beta}+\dfrac{9}{\sin^2\gamma})\geq 18$

$\therefore \quad \dfrac{1}{\sin^2\alpha}+\dfrac{4}{\sin^2\beta}+\dfrac{9}{\sin^2\gamma}$ 的最小値 $=18$

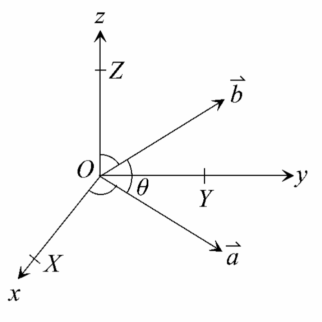
12. 設 X，Y，Z 三點分別爲在空間坐標系中 x 軸，y 軸，z 軸上的點，求$\angle XOY$ 在 xy 平面上的平分線與$\angle YOZ$ 在 yz 平面上的平分線之夾角。

Ans： $\dfrac{\pi}{3}$或$\dfrac{2\pi}{3}$

詳解：

$\angle XOY$ 在 xy 平面上的平分線之一方向向量爲 $\vec{a}\ =(1，1，0)$

$\angle YOZ$ 在 yz 平面上的平分線之一方向向量爲 $\vec{b}\ =(0，1，1)$

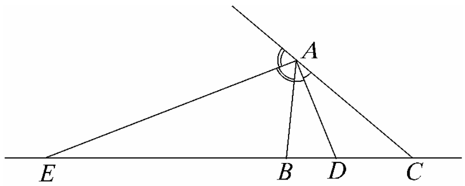


設夾角θ，則$\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$，∴　$\theta=\frac{\pi}{3}$，另一夾角爲$\frac{2\pi}{3}$

13. 設 $A(4，1，3)$，$B(6，3，4)$，$C(4，5，6)$爲空間中三點，$\triangle ABC$ 中，$\angle A$ 的分角線交 $\overline{BC}$ 於 D 點，外角平分線交直線 BC 於 E 點，求 D，E 之坐標。

Ans：. $D(\frac{21}{4}，\frac{15}{4}，\frac{19}{4})$，$E(9，0，1)$

詳解：



$\overline{AB}=\sqrt{(6-4)^2+(3-1)^2+(4-3)^2}=3$，

$\overline{AC}=\sqrt{0^2+4^2+3^2}=5$

(1)設D點坐標爲$(x_1，y_1，z_1)$，　$\angle A$之分角線$\overline{BC}$於D

∴　$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{3}{5}$

由分點公式$x_1=\frac{5\times6+3\times4}{3+5}=\frac{21}{4}$，$y_1=\frac{5\times3+3\times5}{3+5}=\frac{15}{4}$，　$z_1=\frac{5\times4+3\times6}{3+5}=\frac{19}{4}$

∴　$D(\frac{21}{4}，\frac{15}{4}，\frac{19}{4})$

(2)設E點坐標爲$(x_2，y_2，z_2)$

∵　E是$\angle A$之分角線平分線與直線BC之交點，　$\frac{\overline{BE}}{\overline{CE}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{3}{5}$

∵　$E-B-C$　∴　$\overline{EB}:\overline{BC}=3:2$

由分點公式　$6=\frac{2x_2+3\times4}{3+2}$，$3=\frac{2y_2+3\times5}{3+2}$，$4=\frac{2z_2+3\times6}{3+2}$

⇒　$x_2=9$，$y_2=0$，$z_2=1$，故$E(9，0，1)$

14. 設 $A(1，2，3)$，$B(2，4，-1)$，$C(0，-3，1)$爲空間三點，求$\triangle ABC$ 之面積。

Ans：$\frac{3}{2}\sqrt{69}$

詳解：∵　$\overrightarrow{AB}=(1，2，-4)$，$\overrightarrow{AC}=(-1，-5，-2)$

∴　$|\overrightarrow{AB}|^2=1+4+16=21$，$|\overrightarrow{AC}|^2=1+25+4=30$ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-1-10+8=-3$

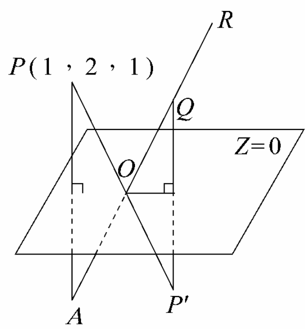
故$\triangle ABC$之面積 $=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{21\times30-9}=\frac{3}{2}\sqrt{69}$

15. 在空間坐標，設 xy 平面爲一鏡面，有一光線通過點 $P(1，2，1)$，射向鏡面上的點 $O(0，0，0)$，經鏡面反射後通過 R，$\overline{OR}=2\overline{OP}$，求 R 的坐標。

Ans：$(-2，-4，2)$

解析：

因入射角等於反射角，故反射線必與入射線的延長線關於鏡面成對稱。設 P 關於 O 之對稱點 P'，P'關於 xy 平面的對稱點 Q，則 $\overrightarrow{OR}=2\overrightarrow{OQ}$，又 $P'(-1，-2，-1)$，$Q(-1，-2，1)$



$\therefore\quad \overrightarrow{OR}=2\overrightarrow{OQ}=(-2，-4，2)$，即 R 的坐標爲$(-2，-4，2)$

16. 空間二向量$\vec{a}=(x+2，y-1，z+3)$，$\vec{b}=(x-4，y+1，z-1)$，若$\vec{a}$，$\vec{b}$ 的內積$\vec{a}\cdot\vec{b}=-14$，求$\vec{a}$，$\vec{b}$ 的夾角。

Ans： $180°$

詳解：

$\vec{a}=(x+2，y-1，z+3)$，$\vec{b}=(x-4，y+1，z-1)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=-14 \quad\Rightarrow\quad (x+2)(x-4)+(y-1)(y+1)+(z+3)(z-1)=-14$

$\Rightarrow\quad x^2+y^2+z^2-2x+2z+2=0 \quad\Rightarrow\quad (x-1)^2+y^2+(z+1)^2=0$

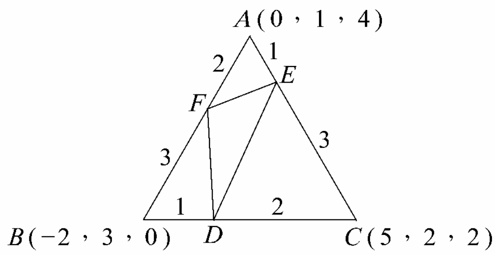
$\Rightarrow\quad x=1，y=0，z=-1$

$\therefore\quad \vec{a}=(3，-1，2)$，$\vec{b}=(-3，1，-2)$

設$\vec{a}$，$\vec{b}$ 夾角θ，則$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\Rightarrow\cos\theta=\dfrac{-14}{\sqrt{14}\sqrt{14}}=-1$，故$\theta=180°$

17. $\triangle ABC$ 的三邊$\overline{BC}$，$\overline{AC}$，$\overline{AB}$ 上各取一點 D，E，F 使 $2\overline{BD}=\overline{CD}$，$\overline{CE}=3\overline{AE}$，$3\overline{AF}=2\overline{BF}$，已知 $A(0，1，4)$，$B(-2，3，0)$，$C(5，2，2)$，求$\triangle DEF$ 的重心坐標。

Ans： $(\dfrac{47}{180},\dfrac{343}{180},\dfrac{394}{180})$



詳解：

$2\overline{BD}=\overline{CD}$，$\overline{CE}=3\overline{AE}$，$3\overline{AF}=2\overline{BF}$

$\Rightarrow\quad \dfrac{\overline{BD}}{\overline{CD}}=\dfrac{1}{2},\dfrac{\overline{CE}}{\overline{AE}}=\dfrac{1}{2},\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=\dfrac{2}{3}$

利用分點公式，$O(0，0，0)$

$\overrightarrow{OD}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OC}=\dfrac{2}{3}(-2，3，0)+\dfrac{1}{3}(5，2，2)=(\dfrac{1}{3},\dfrac{8}{3},\dfrac{2}{3})$，$\therefore\quad D(\dfrac{1}{3},\dfrac{8}{3},\dfrac{2}{3})$

$\overrightarrow{OE}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\dfrac{3}{4}(0，1，4)+\dfrac{1}{4}(5，2，2)=(\dfrac{5}{4},\dfrac{5}{4},\dfrac{14}{4})=(\dfrac{5}{4},\dfrac{5}{4},\dfrac{7}{2})$，$\therefore\quad E(\dfrac{5}{4},\dfrac{5}{4},\dfrac{7}{2})$

$\overrightarrow{OF}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{OA}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{OB}=\dfrac{3}{5}(0，1，4)+\dfrac{2}{5}(-2，3，0)=(-\dfrac{4}{5},\dfrac{9}{5},\dfrac{12}{5})$，$\therefore\quad F(-\dfrac{4}{5},\dfrac{9}{5},\dfrac{12}{5})$

又$\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF})=(\dfrac{47}{180},\dfrac{343}{180},\dfrac{394}{180})$

故$\triangle DEF$ 的重心 G 的坐標爲$(\dfrac{47}{180},\dfrac{343}{180},\dfrac{394}{180})$