高雄市明誠中學 高三(上)數學複習測驗 日期：92.12.20					
範圍	Book-Chap1,2 平面、空間向量(1)	班級	普三 班	姓名	
		座號			

一、單選題：

1. 直線 L 的參數式為 $\begin{cases} x = 4 - t \\ y = 3 + 2t \end{cases}$，$t \in R$，則 L 的斜率為

(A) $\frac{4}{3}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $-\frac{1}{2}$ (D) -2 (E) $\frac{1}{2}$

Ans： (D)

詳解：由 L：$\begin{cases} x = 4 - t \\ y = 3 + 2t \end{cases}$，$t \in R$，令 $t = 0$，$t = 1$

$\therefore$ L 過點 $A(4，3)$，$B(3，5)$ $\therefore$ L 的斜率為 -2

2. 設 $2\overrightarrow{PA} = \alpha\overrightarrow{PB} + \beta\overrightarrow{PC}$，$\alpha$，$\beta \in R$，若 A，B，C 共線，則 $\alpha + \beta$ 之值為

(A) 1 (B) -1 (C) 2 (D) -2 (E)不能確定。

Ans： (C)

詳解：$2\overrightarrow{PA} = \alpha\overrightarrow{PB} + \beta\overrightarrow{PC}$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{PA} = \frac{\alpha}{2}\overrightarrow{PB} + \frac{\beta}{2}\overrightarrow{PC}$

$\because$ A，B，C 共線 $\Rightarrow$ $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 1$ $\Rightarrow$ $\alpha + \beta = 2$

3. xy 平面上，A，B，C 三點不共線，則向量 $\alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$ $(\alpha + \beta = 1，\alpha \geq 0，\beta \geq 0)$的一切終點之集合為(A)一個三角形 (B)一個三角形區域 (C)一個平行四邊形 (D)一個平行四邊形區域 (E)一線段。

Ans： (E)

詳解：其圖形為

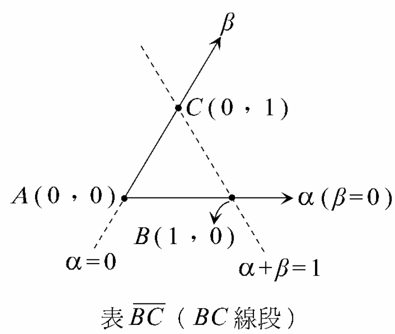
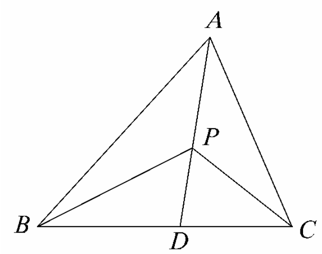


表 $\overline{BC}$（BC 線段）

4. 如下圖，已知 $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{19}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{19}\overrightarrow{AC}$，則△$ABP$ 面積是△ACP 面積的(A) $\frac{19}{15}$ (B) 2 (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{5}{3}$ (E) $\frac{8}{5}$ 倍。



Ans： (D)

詳解：(1)由 $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{19}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{19}\overrightarrow{AC}$

$\because$ $\frac{3}{19} + \frac{5}{19} < 1$ $\therefore$ P，B，C 不共線

(2)如圖，令 $\overrightarrow{AD} = t\,\overrightarrow{AP} = \frac{3t}{19}\overrightarrow{AB} + \frac{5t}{19}\overrightarrow{AC}$

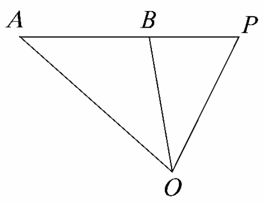
$\because$ B，D，C 共線 $\therefore$ $\dfrac{3t}{19}+\dfrac{5t}{19}=1$ $\therefore$ $t=\dfrac{19}{8}$

$\therefore$ $\overrightarrow{AD}=\dfrac{3}{8}\overrightarrow{AB}+\dfrac{5}{8}\overrightarrow{AC}\Rightarrow$ $\overline{BD}$ ： $\overline{DC}=5：3$

(3).$\therefore$ $\triangle ABD：\triangle ACD=5：3$

又$\triangle PBD：\triangle PCD=5：3\Rightarrow$ $\triangle ABP：\triangle ACP=5：3=\dfrac{5}{3}$

5. 如下圖，已知$\overline{AP}$ ： $\overline{BP}=m：n$，則$\overrightarrow{OP}=$



(A)$\dfrac{n\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}}{m+n}$ (B)$\dfrac{m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}}{m+n}$ (C)$\dfrac{m\overrightarrow{OA}-n\overrightarrow{OB}}{m+n}$

(D)$\dfrac{-n\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}}{m-n}$ (E)$\dfrac{n\overrightarrow{OA}-m\overrightarrow{OB}}{m-n}$

Ans： (D)

詳解：(1) $\overline{AB}$ ： $\overline{BP}=m-n：n$

(2).$\therefore$ $\overrightarrow{OB}=\dfrac{n\overrightarrow{OA}+(m-m)\overrightarrow{OP}}{(m-n)+n}=\dfrac{n\overrightarrow{OA}+(m-n)\overrightarrow{OP}}{m}$

$\therefore$ $n\overrightarrow{OA}+(m-n)\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OB}$

$\therefore$ $\overrightarrow{OP}=\dfrac{-n\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}}{m-n}$

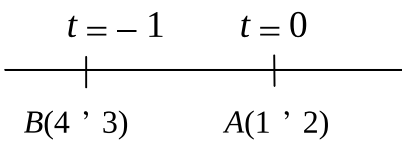
6. 設 $A(1，2)$，$B(4，3)$，則$\overrightarrow{BA}$(BA 射線)的參數方程式，可為

(A)$\begin{cases}x=1-3t\\y=2-t\end{cases}$，$-1\le t\le 0$ (B)$\begin{cases}x=1-3t\\y=2-t\end{cases}$，$t\ge -1$ (C)$\begin{cases}x=1-3t\\y=2-t\end{cases}$ $t\le 0$

(D)$\begin{cases}x=1-3t\\y=2+t\end{cases}$ $t\ge 0$ (E)$\begin{cases}x=1-3t\\y=2+t\end{cases}$ $0\le t\le 1$

Ans： (B)

詳解：



$\therefore$ $\overrightarrow{BA}$的參數方程式，可為$\begin{cases}x=1-3t\\y=2-t\end{cases}$，$t\ge -1$

$\overline{AB}$ 的參數方程式，可為$\begin{cases}x=1-3t\\y=2-t\end{cases}$，$-1\le t\le 0$

$\overrightarrow{AB}$ 的參數方程式，可為$\begin{cases}x=1-3t\\y=2-t\end{cases}$，$t\le 0$

7. xy 平面上，點 $P(2x-1，3x+5)$，x 為任意實數，則點 P 的圖形為一直線，其方程式是

(A) $3x-2y+13=0$ (B) $3x+2y-13=0$ (C) $3x+2y+13=0$ (D) $2x-3y-13=0$ (E)

$2x+3y+13=0$。

Ans： (A)

詳解：(1) $P(2x-1，3x+5)$，$x\in R$ $\Leftrightarrow$ $P(2t-1，3t+5)$，$t\in R$

(2)令$\begin{cases} x=2t-1 \\ y=3t+5 \end{cases}$，$t\in R\Rightarrow$ $3x-2y=-13$ $\Rightarrow$ $3x-2y+13=0$

8. 直線 L：$3x-4y=7$ 有一個方向向量爲$(1，t)$，$t\in R$，則 t 之值爲

(A)$\frac{4}{3}$ (B)$\frac{3}{4}$ (C) $-\frac{4}{3}$ (D) $-\frac{3}{4}$ (E)不是唯一的實數。

Ans： (B)

詳解：$\because$ 直線 $ax+by+c=0$ 的方向量爲 $t(b，-a)$，$t\in R$，$t\neq 0$

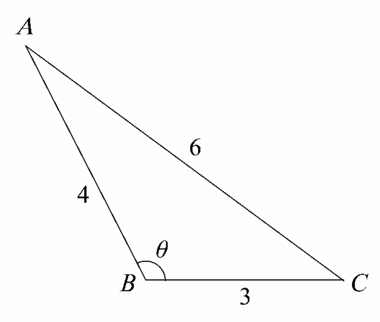
$\therefore$ L：$3x-4y=7$ 的方向向量爲 $k(4，3)$，$k\neq 0$

令 $k(4，3)=(1，t)$ $\therefore$ $k=\frac{1}{4}$，$t=3k=\frac{3}{4}$

二、 填充題：

1. △ABC的三邊長爲 $\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=3$，$\overline{AC}=6$，求 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=$ ＿＿＿＿＿＿。

Ans： $\frac{11}{2}$



詳解：$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$

$=-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=-|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|\cos\theta$

$=-4\cdot 3\cdot\frac{4^2+3^2-6^2}{2\cdot 4\cdot 3}=\frac{11}{2}$

2. 設 $|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，且 $|\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{21}$，求 $|3\vec{a}+\vec{b}|=$ ＿ 。

Ans： $\sqrt{79}$

詳解：$|\vec{a}+2\vec{b}|^2=(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})=21$

$\Rightarrow$ $|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=21$

$\Rightarrow$ $3^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\cdot 2^2=21$ $\Rightarrow$ $\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$

又 $|3\vec{a}+\vec{b}|^2=(3\vec{a}+\vec{b})\cdot(3\vec{a}+\vec{b})=9|\vec{a}|^2+6\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=9\cdot 3^2+6\cdot(-1)+2^2=79$

$\therefore$ $|3\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{79}$

3. 設a，b，c，$d\in R$，$a^2+b^2=2$，$4c^2+d^2=9$，若$ad-2bc$之最大值爲M，最小值爲m，則 $(M，m)=$ ＿＿＿＿＿＿。

Ans： $(3\sqrt{2}，-3\sqrt{2})$

詳解：$(a^2+b^2)[d^2+(-2c)^2]\geq(ad-2bc)^2$ $\Rightarrow$ $(ad-2bc)^2\leq 18$

$\Rightarrow$ $-3\sqrt{2}\leq ad-2bc\leq 3\sqrt{2}$ $\therefore$ $M=3\sqrt{2}$，$m=-3\sqrt{2}$

4. 設$\vec{a}=(-1，2)$，$\vec{b}=(1，k)$，若$\vec{a}$，$\vec{b}$ 之夾角爲 $150°$，則k之值 $=$ ＿＿＿＿＿＿。

Ans： $k=8-5\sqrt{3}$

詳解：$\cos 150° = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ $\Rightarrow$ $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{-2+2k}{\sqrt{5}\sqrt{1+k^2}} \Rightarrow$ $\dfrac{3}{4} = \dfrac{(-1+2k)^2}{5(1+k^2)}$

$\Rightarrow$ $k^2 - 16k - 11 = 0$ $\Rightarrow$ $k = 8 \pm 5\sqrt{3}$（正不合 $\because$ $-1+2k<0$）

5. 已知平面坐標系上三點$A(3，-2)$，$B(-1，1)$，$C(5，4)$，

(1) $|\overrightarrow{AB}| =$ ＿＿＿＿＿＿。

(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} =$ ＿＿＿＿＿＿。

(3)若 $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$，則$D$點坐標爲＿＿＿＿＿＿。

(4)$\triangle ABC$面積 $=$ ＿＿＿＿＿＿。

(5) $\overrightarrow{AC}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 的正射影之長爲＿＿＿＿＿＿。

(6) $\overrightarrow{AC}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 的正射影爲＿＿＿＿＿＿。

(7) $t\in R$，則 $|t\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|$ 的最小值爲＿＿＿＿＿＿。

Ans： (1)5 (2) 10 (3) $(-11，1)$ (4) 15 (5) 2 (6) $(\dfrac{-8}{5}，\dfrac{6}{5})$(7) 6

詳解：$A(3，-2)$，$B(-1，1)$，$C(5，4)\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB} = (-4，3)$，$\overrightarrow{AC} = (2，6)$

(1) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-4)^2+3^2} = 5$

(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = (-4，3)\cdot(2，6) = -8+18 = 10$

(3) $\overrightarrow{AD} = 3(-4，3) - (2，6) = (-14，3)$

令$D(x，y)$ $\Rightarrow$ $(x-3，y+2) = (-14，3) \Rightarrow$ $(x，y) = (-11，1)$

(4)$\triangle ABC$面積 $= \dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{(25)(4+36)-10^2} = 15$

(5)正射影長 $= \dfrac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \dfrac{10}{5} = 2$

(6)正射影 $= (\dfrac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|^2})\cdot\overrightarrow{AB} = \dfrac{10}{25}(-4，3) = (\dfrac{-8}{5}，\dfrac{6}{5})$

(7) $|t\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|^2 = |t(-4，3)+(2，6)|^2 = |(-4t+2，3t+6)|^2$

$= (-4t+2)^2 + (3t+6)^2 = 25t^2+20t+40$

$= 25(t+\dfrac{2}{5})^2 + 40 - 25\times\dfrac{4}{25} = 25(t+\dfrac{2}{5})^2+36$

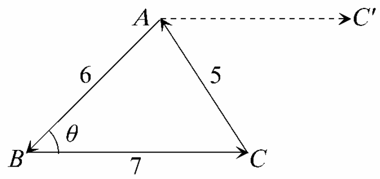
$\therefore$ 當$t = -\dfrac{2}{5}$時，$|t\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|$ 有最小值$\sqrt{36} = 6$

6. 在$\triangle ABC$中，若$\overline{AB} = 6$，$\overline{BC} = 7$，$\overline{CA} = 5$，求$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$之值 $=$ ＿＿＿＿＿＿。

Ans： -30

詳解：如下圖，$\cos\angle ABC = \dfrac{6^2+7^2-5^2}{2\cdot 6\cdot 7} = \dfrac{5}{7}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = \overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\cos\angle BAC' = 6\cdot 7\cdot(-\dfrac{5}{7}) = -30$



7. △ABC中，$\overline{AB}$之中點$D(5，-2)$，$\overline{BC}$之中點$E(-2，3)$，$\overline{AC}$之中點$F(6，5)$，則△ABC之重心$G=$__________。

Ans：(3，2)

詳解：設$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，$C(x_3，y_3)$，$G(x，y)$是△ABC之重心

$$\Rightarrow\quad x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=\frac{\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_2+x_3}{2}+\frac{x_3+x_1}{2}}{3}=\frac{5-2+6}{3}=3$$

$$y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}=\frac{\frac{y_1+y_2}{2}+\frac{y_2+y_3}{2}+\frac{y_3+y_1}{2}}{3}=\frac{-2+3+5}{3}=2$$

$\therefore\quad G(3，2)$

8. 與$(-4，3)$垂直，長為 2 的向量是 __________。

Ans：$\pm(\frac{6}{5}，\frac{8}{5})$

詳解：

(1)若$\bar{a}\neq\bar{0}$，則$\frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$為$\bar{a}$同方向的單位向量

(2)與$(-4，3)$垂直的向量　即與$(3，4)$平行的向量

(3)$\therefore\quad \pm\frac{(3，4)}{5}$是與 $(3，4)$ 平行的單位向量，故 $\pm 2\frac{(3，4)}{5}=\pm(\frac{6}{5}，\frac{8}{5})$為所求

9. △ABC中，$A(2，-8)$，$B(-6，-2)$，$C(6，-5)$，

(1)求△ABC的重心G之坐標為__________。

(2)若∠A之平分線交$\overline{BC}$於D，求D坐標__________。

(3)若∠A之外角平分線交直線BC於E，求E坐標__________。

Ans：(1)$(\frac{2}{3}，-5)$　(2)$(2，-4)$　(3)$(18，-8)$

詳解：(1)△ABC 的重心 G 之坐標為　$(\frac{2-6+6}{3}，\frac{-8-2-5}{3})=(\frac{2}{3}，-5)$

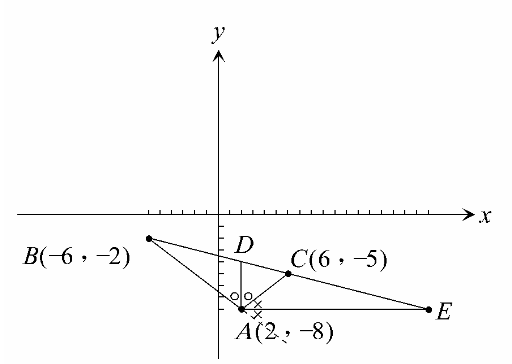
(2) $\overline{AB}=\sqrt{64-36}=10$，$\overline{AC}=\sqrt{16+9}=5$

$\Rightarrow\quad \overline{BD}:\overline{DC}=\overline{AB}:\overline{AC}=10:5=2:1$

設 $D(x，y)\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{-6+2\cdot 6}{1+2}=2\\ y=\frac{-2+2\cdot(-5)}{1+2}=-4\end{cases}$　$\therefore\quad D(2，-4)$

(3) $\overline{AE}$ 為∠A 的外角平分線　$\Rightarrow\quad \overline{BE}:\overline{CE}=\overline{AB}:\overline{AC}=2:1$

設 $E(x，y)\Rightarrow\begin{cases}\frac{x-6}{2}=6\\ \frac{y-2}{2}=-5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=18\\ y=-18\end{cases}$　$\therefore\quad E(18，-8)$



10. 設△ABC 之三邊長 x，y，z 滿足 $x-2y+z=0$ 及 $3x+y-2z=0$，則△ABC 之最大角是多少度？

Ans： $120°$

詳解：

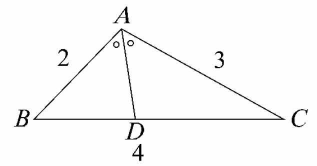
$$\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 3x+y-2z=0 \end{cases} \Rightarrow \quad x：y：z=\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}：\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}：\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=3：5：7$$

設三邊長爲 $x=3k$，$y=5k$，$z=7k$

則最大角度之 $\cos\theta=\dfrac{(3k)^2+(5k)^2-(7k)^2}{2(3k)(5k)}=-\dfrac{1}{2}$，$\theta=120°$，∴ 最大角度爲 $120°$

11. 若△ABC中，$\overline{AB}=2$，$\overline{AC}=3$，$\overline{BC}=4$ 且∠A的角平分線 $\overline{AD}$ 交 $\overline{BC}$ 於D點，求 $|\overrightarrow{AD}|=$ __________。

Ans： $\dfrac{3\sqrt{6}}{5}$



詳解：$\overline{AB}=2$，$\overline{AC}=3$，$\overline{BC}=4$，$\overline{BD}$ ：$\overline{DC}=\overline{AB}$ ：$\overline{AC}=2：3$

$$\therefore \quad \overrightarrow{AD}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC} \quad \Rightarrow \quad |\overrightarrow{AD}|^2=\frac{1}{25}|3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}|^2$$

$$=\frac{1}{25}(9|\overrightarrow{AB}|^2+12\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+4|\overrightarrow{AC}|^2)$$

又 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times3\cos A=6\times\dfrac{4+9-16}{2\times2\times3}=-\dfrac{3}{2}$

故 $|\overrightarrow{AC}|^2=\dfrac{1}{25}(9\times4+12\times(-\dfrac{3}{2})+4\times9)=\dfrac{54}{25}$，即 $|\overrightarrow{AC}|=\dfrac{3\sqrt{6}}{5}$

12. 設平面上有二平行線L_1：$2x-y-4=0$，L_2：$2x-y+6=0$ 及一點$A(-1，4)$，則 $d(L_1，L_2)=$ __________，又$d(A；L_1)=$ __________。

Ans： $2\sqrt{5}$ ；$2\sqrt{5}$

詳解：(1) $L_1=2x-y-4=0$，L_2：$2x-y+6=0\Rightarrow \quad d(L_1，L_2)=\dfrac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$

(2) L_1：$2x-y-4=0$，$A(-1，4)\Rightarrow \quad d(A；L_1)=\dfrac{|-2-4-4|}{\sqrt{5}}=\dfrac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$

13. O爲△ABC內部一點，$|\overrightarrow{OA}|=3$，$|\overrightarrow{OB}|=5$，$|\overrightarrow{OC}|=7$，且 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，求

(1) $\overrightarrow{OA}$與$\overrightarrow{OB}$夾角__________。　(2)△ABC面積__________。

Ans： (1) $\frac{\pi}{3}$　(2) $\frac{45\sqrt{3}}{4}$

詳解：O為△ABC內部一點，且 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，則$O$為重心

(1) $|\overrightarrow{OA}|=3$，$|\overrightarrow{OB}|=5$，$|\overrightarrow{OC}|=7$

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OC} \Rightarrow |\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|^2=|-\overrightarrow{OC}|^2$$

$$\Rightarrow 9+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+25=49$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|\cos\theta$$

$$\Rightarrow \frac{15}{2}=3\times 5\cos\theta \Rightarrow \cos\theta=\frac{1}{2} \quad \therefore \theta=\frac{\pi}{3}$$

(2) $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore$ △ABC面積 $=3$△OAB面積 $=3\times\frac{1}{2}\times 3\times 5\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{45\sqrt{3}}{4}$

14. 設$\vec{a}=(2，6)$，$\vec{b}=(-4，3)$，則

(1) $\vec{a}$在$\vec{b}$方向上之投影量 $=$__________。(2) $\vec{a}$在$\vec{b}$方向上之投影 $=$__________。

Ans： 2；$(\frac{-8}{5}，\frac{6}{5})$

詳解：

$\vec{a}=(2，6)$，$\vec{b}=(-4，3)$，θ 為$\vec{a}$，$\vec{b}$之夾角

(1) $\vec{a}$在$\vec{b}$方向上之投影量$=|\vec{a}|\cos\theta=|\vec{a}|\cdot\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{10}{5}=2$

(2) $\vec{a}$在$\vec{b}$方向上之投影 $=2(\frac{-4}{5}，\frac{3}{5})=(\frac{-8}{5}，\frac{6}{5})$

15. 設$\overrightarrow{OA}=(-3，4)$，$\overrightarrow{OB}=(12，5)$，$\angle AOB$之角平分線交$\overline{AB}$於$P$，則

$\overrightarrow{OP}=$__________$\overrightarrow{OA}+$__________$\overrightarrow{OB}$。

Ans： $\frac{13}{18}$；$\frac{5}{18}$

詳解：$\overrightarrow{OA}=(-3，4) \Rightarrow |\overrightarrow{OA}|=5$；$\overrightarrow{OB}=(12，5) \Rightarrow |\overrightarrow{OB}|=13$

$\Rightarrow \overline{AP}:\overline{PB}=|\overrightarrow{OA}|:|\overrightarrow{OB}|=5:13 \Rightarrow \overrightarrow{OP}=\frac{13}{18}\overrightarrow{OA}+\frac{5}{18}\overrightarrow{OB}$

16. G為△ABC之重心，則$\overrightarrow{AG}=$__________$\overrightarrow{AB}+$__________$\overrightarrow{BC}$。

Ans： $\frac{2}{3}$；$\frac{1}{3}$

詳解：G為△ABC之重心$\Rightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

17. 於△ABC中，延長$\overrightarrow{AB}$使$\overline{AD}=3\overline{AB}$，延長$\overrightarrow{AC}$使$\overline{AE}=4\overline{AC}$，$\overline{CD}$與$\overline{BE}$相交於$P$，若

$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，則 $(x，y)=$__________。

Ans：. $(\frac{9}{11}，\frac{8}{11})$

詳解：

建立坐標系 S ≡ {A；$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$}

$A(0，0)，B(1，0)，C(0，1)\ \Rightarrow\ D(3，0)，E(0，4)$

$\overleftrightarrow{CD}$：$\frac{x}{1}+\frac{y}{4}=1\ \Rightarrow\ x+3y=3$

$\overleftrightarrow{BE}$：$\frac{x}{1}+\frac{y}{4}=1\ \Rightarrow\ 4x+y=4$

解之得 $x=\frac{9}{11}$，$y=\frac{8}{11}$，$\overrightarrow{AP}=(\frac{9}{11}，\frac{8}{11})=\frac{9}{11}(1，0)+\frac{8}{11}(0，1)=\frac{9}{11}\overrightarrow{AB}+\frac{8}{11}\overrightarrow{AC}$

18. $\triangle ABC$之三邊 $\overline{AB}=3$，$\overline{BC}=5$，$\overline{CA}=4$，又平面上一點P，且

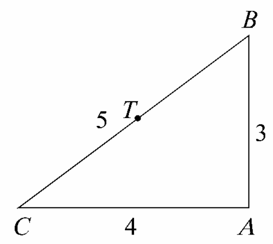
$x\overrightarrow{PA}+y\overrightarrow{PB}+z\overrightarrow{PC}=\vec{0}$，其中$x，y，z\in Z$，

(1)若P爲$\triangle ABC$之內心，則 $(x，y，z)=$ ＿＿＿＿＿。

(2)若P爲$\triangle ABC$之垂心，則 $(x，y，z)=$ ＿＿＿＿＿。

(3)若P爲$\triangle ABC$之外心，則 $(x，y，z)=$ ＿＿＿＿＿。

(4)若P爲$\triangle ABC$之重心，則 $(x，y，z)=$ ＿＿＿＿＿。



Ans： (1) (5，4，3) (2) (1，0，0) (3) (0，1，1) (4) (1，1，1)

詳解：(1) $a=\overline{BC}=5$，$b=\overline{AC}=4$，$c=\overline{AB}=3$

I 爲內心 $\Rightarrow$ $a\triangle IAB：a\triangle IBC：a\triangle ICA=3：5：4$

$\Rightarrow\ 5\overrightarrow{IA}+4\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}\ \Rightarrow\ x=5，y=4，z=3$

(2)$\triangle ABC$ 爲一直角三角形，$\angle A=90°$，斜邊$\overline{BC}$，如右上圖：$\triangle ABC$ 之垂心 $H=A$，

$\triangle ABC$ 之外心爲斜邊之中點 T，H 爲$\triangle ABC$ 之垂心$\Rightarrow$ $\overrightarrow{HA}=\vec{0}\Rightarrow\ x=1，y=0，z=0$

(3) T 爲$\triangle ABC$ 之外心 $\Rightarrow$ $\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC}=\vec{0}\Rightarrow\ x=0，y=1，z=1$

(4)$\because$ P 爲$\triangle ABC$ 之重心 $\Rightarrow$ $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ $\Rightarrow$ $x\overrightarrow{PA}+x\overrightarrow{PB}+x\overrightarrow{PC}=\vec{0}$……①

已知 $x\overrightarrow{PA}+y\overrightarrow{PB}+z\overrightarrow{PC}=\vec{0}$……②

由①，②相減 $\therefore$ $(x-y)\overrightarrow{PB}+(x-z)\overrightarrow{PC}=\vec{0}$

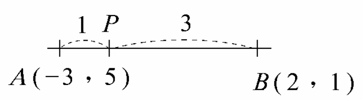
但$\overrightarrow{PB}\nparallel\overrightarrow{PC}$ $\therefore$ $x-y=0，x-z=0\ \Rightarrow\ x=y=z$

但 $x，y，z\in N\cup\{0\}$，$x，y，z$ 互質 $\therefore$ $x=y=z=1$

19. 設$A(-3，5)，B(2，1)$，若P在直線AB上且 $\overline{AP}$：$\overline{PB}=1：3$，則P的坐標爲＿＿＿＿＿。

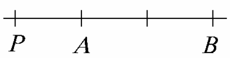
Ans： $(-\frac{7}{4}，4)$ 或 $(-\frac{11}{2}，7)$

詳解：(1)內分時，



$\therefore$ $P(\frac{-9+2}{1+3}，\frac{15+1}{1+3})=P(-\frac{7}{4}，4)$

(2)外分時，

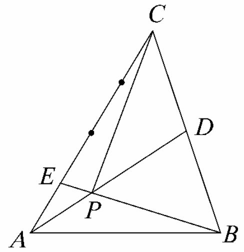


$\because$ $\overline{AP}$：$\overline{PB}=1：3$ $\Rightarrow$ $\overline{PA}$：$\overline{AB}=1：2\Rightarrow$ $P(-\frac{11}{2}，7)$

20. $\triangle ABC$中，D爲$\overline{BC}$中點，$E\in\overline{AC}$ 且 $\overline{AE}$：$\overline{EC}=1：3$，$\overline{AD}$ 交 $\overline{BE}$ 於點P，若

$\overrightarrow{CP}=x\overrightarrow{CA}+y\overrightarrow{CB}$，則數對 $(x，y)=$ ＿＿＿＿＿。

Ans： $(\frac{3}{5}，\frac{1}{5})$



(1)由 $\overrightarrow{CP}=x\overrightarrow{CA}+y\overrightarrow{CB}=x(\frac{4}{3}\overrightarrow{CE})+y\overrightarrow{CB}$

∵　$E，P，B$共線　∴　$\frac{4}{3}x+y=1$

(2)由 $\overrightarrow{CP}=x\overrightarrow{CA}+y\overrightarrow{CB}=x\overrightarrow{CA}+y\ (2\overrightarrow{CD})$

∵　$A，P，D$共線　∴　$x+2y=1$

(3)由(1)，(2)得 $x=\frac{3}{5}$，$y=\frac{1}{5}$

21. I是△ABC的內心，$3\overrightarrow{IA}+4\overrightarrow{IB}+5\overrightarrow{IC}=\vec{0}$，若△$ABC$的周長爲 24，則△$ABC$的面積爲__。

Ans： 24

詳解：令 $a=\overline{BC}$，$b=\overline{CA}$，$c=\overline{AB}$

∵　I 爲△ABC 的內心　∴　$a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

今 $3\overrightarrow{IA}+4\overrightarrow{IB}+5\overrightarrow{IC}=\vec{0}$　∴　$a：b：c=3：4：5$

令 $a=3t$，$b=4t$，$c=5t$，由△ABC 之周長 $=24$　$\Rightarrow$　$3t+4t+5t=24$　$\Rightarrow$　$t=2$

∴　ABC 的面積 $=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}(3t)(4t)=24$

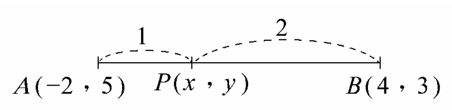
22. 設$A(-2，5)$，$B(4，3)$，P在直線AB上且 $\overline{AP}：\overline{PB}=1：2$，則$P$之坐標爲__________。

Ans： $(0，\frac{13}{3})$或$(-8，7)$

解析：

設 $P(x，y)$

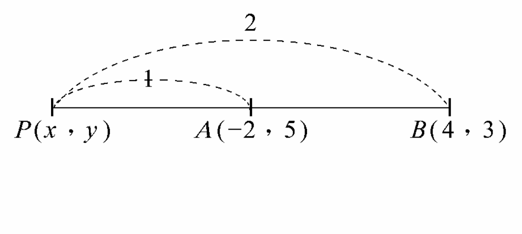
①若 P 爲內分點，$\overline{AP}：\overline{PB}=1：2$，則$\begin{cases}x=\dfrac{1\times4+2\times(-2)}{3}=0\\ y=\dfrac{1\times3+2\times5}{3}=\dfrac{13}{3}\end{cases}$



②若 P 爲外分點，$\overline{AP}：\overline{PB}=1：2$，則 $\overline{AP}：\overline{AB}=1：1$

∴　$\begin{cases}-2=\dfrac{1\times4+1\times x}{2}\\ 5=\dfrac{1\times3+1\times y}{2}\end{cases}$　$\Rightarrow$　$\begin{cases}x=-8\\ y=7\end{cases}$

∴　P 點坐標爲 $(0，\frac{13}{3})$或 $(-8，7)$



23. 設平面上有三條直線，L_1，L_2及L，已知L_1：$2x+y-1=0$，L：$x+y=0$，且L是L_1，L_2之交角平分線，則L_2之方程式為__________。

Ans：$x+2y+1=0$

詳解：

L_1：$2x+y-1=0 \Rightarrow$ 取 $\overrightarrow{N_1}=(2，1)$

L：$x+y=0 \Rightarrow$ 取 $\vec{N}=(1，1)$

設L_2之法向量 $\overrightarrow{N_2}=(a，b)$，$L$是$L_1$，$L_2$之交角的平分線

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{N_1}$ 與 $\vec{N}$ 所夾角之銳角 $=\overrightarrow{N_2}$ 與 $\vec{N}$ 所夾之銳角

$\Rightarrow \dfrac{|\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N}|}{|\overrightarrow{N_1}||\overrightarrow{N}|}=\dfrac{|\overrightarrow{N_2}\cdot\overrightarrow{N}|}{|\overrightarrow{N_2}||\overrightarrow{N}|} \Rightarrow |\overrightarrow{N_2}||\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N}|=|\overrightarrow{N_1}||\overrightarrow{N_2}\cdot\overrightarrow{N}|$

$\Rightarrow \sqrt{a^2+b^2}\cdot 3=\sqrt{5}|a+b|$

兩邊平方 $\Rightarrow 9(a^2+b^2)=5(a+b)^2=5a^2+5b^2+10ab$

$\Rightarrow 4a^2-10ab+4b^2=0 \Rightarrow 2a^2-5ab+2b^2=0$

$\Rightarrow (a-2b)(2a-b)=0$

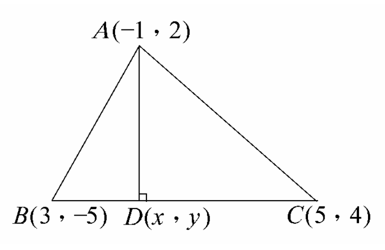
故取 $\overrightarrow{N_2}=(1，2)$或$(2，1)$……不合，與 $\overrightarrow{N_1}$ 相同，故 $\overrightarrow{N_2}=(1，2)$

又L_1與L_2相交於點$(1，-1) \Rightarrow L_2$：$x+2y+1=0$

24. 設△ABC中，$A(-1，2)$，$B(3，-5)$，$C(5，4)$，自A向$\overline{BC}$作垂線，垂足為D，則D之坐標為__________。

Ans：$(\dfrac{73}{17}，\dfrac{14}{17})$

詳解：



設 $D(x，y)$，由 B，D，C 三點共線 $\Rightarrow \overrightarrow{BD}=t\overrightarrow{BC}$，$t\in R$

$\Rightarrow \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+5}{9} \Rightarrow 9x-2y=37$

又 $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=(x+1，y-2)\cdot(2，9)=0 \Rightarrow 2x+9y=16$

解之得 $x=\frac{73}{17}$，$y=\frac{14}{17}$

25. 設P在△ABC之內部且 $3\overrightarrow{PA}+4\overrightarrow{PB}+5\overrightarrow{PC}=\vec{0}$，若△$PAB$之面積為 20，則△$ABC$之面積 = 。

Ans： 48

詳解：$P\in\triangle ABC$ 之內部

$3\overrightarrow{PA}+4\overrightarrow{PB}+5\overrightarrow{PC}=\vec{0} \Rightarrow a\triangle PAB：a\triangle PBC：a\triangle PCA=5：3：4$

又 $a\triangle ABC=a\triangle PAB+a\triangle PBC+a\triangle PCA$

$\Rightarrow a\triangle ABC：a\triangle PAB=12：5$

$\Rightarrow a\triangle ABC=\frac{12}{5}a\triangle PAB=\frac{12}{5}\times 20=48$

26. 設 $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{c}|=4$ 且 $2\vec{a}+3\vec{b}-4\vec{c}=\vec{0}$，則 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$__________。

Ans： $\frac{53}{4}$

詳解：

$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{c}|=4$

$2\vec{a}+3\vec{b}-4\vec{c}=\vec{0} \Rightarrow 2\vec{a}+3\vec{b}=4\vec{c}$

$\Rightarrow |2\vec{a}+3\vec{b}|^2=|4\vec{c}|^2 \Rightarrow 4|\vec{a}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2=16|\vec{c}|^2$

$\Rightarrow 16+12\vec{a}\cdot\vec{b}+81=256 \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{53}{4}$

27. △ABC中，$\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=5$，$\overline{CA}=6$，則 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ 之值為__________。

Ans： $-\frac{5}{2}$

詳解：$\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 的夾角為 $180°-\angle ABC$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cos(180°-\angle ABC)=ca(-\cos B)=-ca\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

$=-\frac{1}{2}(c^2+a^2-b^2)=-\frac{1}{2}(16+25-36)=-\frac{5}{2}$

28. 已知三直線L_1：$2x+y+1=0$，L_2：$x+2y-1=0$，L_3：$2x-y-7=0$，圍成△ABC，其內心坐標為__________。

Ans： $(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$

詳解：A：$\begin{cases}2x+y+1=0\\x+2y-1=0\end{cases}$ $\therefore$ A 點坐標為$(-1，1)$

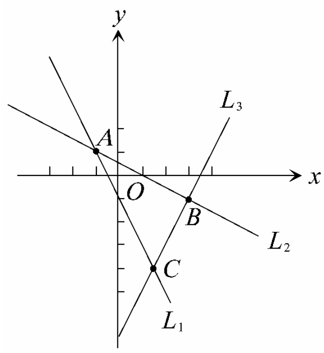
B：$\begin{cases}x+2y-1=0\\2x-y-7=0\end{cases}$ $\therefore$ B 點坐標為$(3，-1)$

C：$\begin{cases}2x+y+1=0\\2x-y-7=0\end{cases}$ $\therefore$ C 點坐標為$(\frac{3}{2}，-4)$

$a=\overline{BC}=\sqrt{\frac{9}{4}+9}=\frac{3\sqrt{5}}{2}$ ，$b=\overline{AC}=\sqrt{\frac{25}{4}+25}=\frac{5\sqrt{5}}{2}$ ，$c=\overline{AB}=\sqrt{16+4}=2\sqrt{5}$

$\therefore\quad a：b：c=3：5：4$

設 I 為△ABC 之內心，O 為原點⇒



$\overrightarrow{OI}=\frac{3}{3+5+4}\overrightarrow{OA}+\frac{5}{3+5+4}\overrightarrow{OB}+\frac{4}{3+5+4}\overrightarrow{OC}$

$=\frac{3}{12}(-1，1)+\frac{5}{12}(3，-1)+\frac{4}{12}(\frac{3}{2}，-4)=(\frac{3}{2}，-\frac{3}{2})$

$\therefore\quad I(\frac{3}{2}，-\frac{3}{2})$

29. △ABC的面積 $=7$，則點集合 $\{P\mid\overrightarrow{AP}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}，-1\le\alpha\le3，-2\le\beta\le1\}$ 所表示區域的面積為__________。

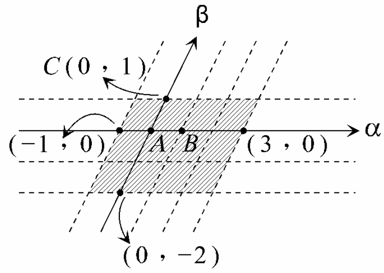
Ans： 168

詳解：點集合 $\{P\mid\overrightarrow{AB}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}，-1\le\alpha\le3，-2\le\beta\le1\}$

的區域為一個平行四邊形，如圖，其面積為

$[3-(-1)]\,[1-(-2)]\,(2\triangle ABC)=24\,(\triangle ABC)=24\times7$

$=168$

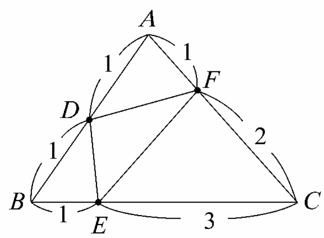


30. 設△ABC中，D，E，F三點分別在 $\overline{AB}$ ，$\overline{BC}$ ，$\overline{CA}$ 上，

$\overline{AD}=\overline{DB}$ ，$\overline{BC}=4\overline{BE}$ ，$\overline{CF}=2\overline{AF}$ 且G是△DEF的重心，

若 $\overrightarrow{AG}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ ，則 $(x，y)=$__________。

Ans： $(\frac{5}{12}，\frac{7}{36})$



詳解：∵ G 為△DEF 的重心，

$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF})=\frac{1}{3}(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC})$

$=\frac{1}{3}(\frac{5}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{7}{12}\overrightarrow{AC})=\frac{5}{12}\overrightarrow{AB}+\frac{7}{36}\overrightarrow{AC}$ ，∴ $(x，y)=(\frac{5}{12}，\frac{7}{36})$

31. 設$A(1，5)$，$B(1，-7)$，若 $\overline{AB}$ 與直線$y=mx-5$ 交於P點，且 $\overline{AP}：\overline{PB}=7：1$，求$m$之值 $=$__________。

Ans： $-\frac{1}{2}$

詳解：設 $P(1，y)$在 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AP}：\overline{PB}=7：1$， $y=\frac{1}{8}[1\cdot5+7\cdot(-7)]=-\frac{11}{2}$

將 $P(1，-\frac{11}{2})$代入 $y=mx-5$ 得 $m=-\frac{1}{2}$

32 設$A(3，2)$，$L：2x-y+1=0$，則A在L上之投影坐標為__________，A關於L之對稱點為__________，又A至直線L之距離 $=$ __________。

Ans： $(1，3)$；$(-1，4)$；$\sqrt{5}$

詳解：$A(3，2)$，$L：2x-y+1=0$

$$\Rightarrow\quad A\text{ 在 }L\text{ 上投影點 }H：\begin{cases}x=3-2\cdot\dfrac{6-2+1}{2^2+(-1)^2}=1\\ y=2+1\cdot 1=3\end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad A\text{ 關於 }L\text{ 之對稱點 }A'：\begin{cases}x=3-4\cdot 1=-1\\ y=2+2\cdot 1=4\end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad d(A；L)=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

33 平面上兩平行直線 $4x+3y-7=0$ 與 $8x+6y+1=0$ 之間的距離為__________。

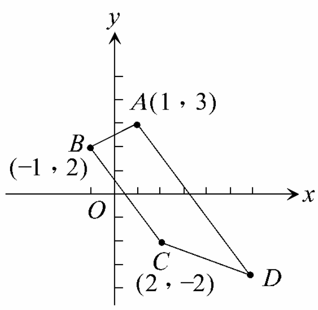
Ans： $\dfrac{3}{2}$

詳解：兩平行直線距離 $=\dfrac{\left|\frac{1}{2}-(-7)\right|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{3}{2}$

34 梯形$ABCD$中，已知$\overline{AD}\parallel\overline{BC}$，$A(1，3)$，$B(-1，2)$，$C(2，-2)$，$\overline{AB}=8$，則$D$點坐標為__________。

Ans： $(\dfrac{29}{5}，-\dfrac{17}{5})$

詳解：



$\overrightarrow{BC}=(3，-4)$ $\because$ $\overrightarrow{AD}\parallel\overrightarrow{BC}$

$\therefore$ 直線AD的參數式為$\begin{cases}x=1+3t\\ y=3-4t\end{cases}$，$t\in R$

設$D(1+3t，3-4t)$ $\because$ $\overline{AD}=8$，$A(1，3)$

$\therefore$ $\sqrt{(3t)^2+(-4t)^2}=8$ $\Rightarrow$ $25t^2=64$

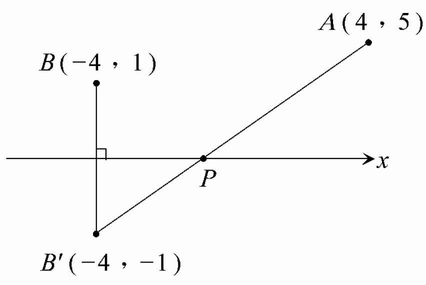
$\Rightarrow$ $t=\pm\dfrac{8}{5}$（負不合）

$t=\dfrac{8}{5}$時，$x=\dfrac{29}{5}$，$y=-\dfrac{17}{5}$ $\therefore$ $D(\dfrac{29}{5}，-\dfrac{17}{5})$

35 求二直線L_1：$\begin{cases}x=2-t\\ y=1+3t\end{cases}$（$t\in R$），$L_2$：$3x-2y-1=0$ 之交點為__________。

Ans： $(\dfrac{5}{3}，2)$

詳解：將L_1：$\begin{cases}x=2-t\\ y=1+3t\end{cases}$（$t\in R$）代入$L_2$，得 $3(2-t)-2(1+3t)-1=0$ $\Rightarrow$ $t=\dfrac{1}{3}$



故交點$(x，y) = (\frac{5}{3}，2)$

36 x是實數，則$\sqrt{(x-4)^2+25}+\sqrt{(x+4)^2+1}$的最小值為__________。

Ans： 10

詳解：即求

$y=\sqrt{(t-4)^2+25}+\sqrt{(t+4)^2+1}=\sqrt{(t-4)^2+(0-5)^2}+\sqrt{(t+4)^2+(0-1)^2}$ 之最小值

令 $P(t，0)$，$A(4，5)$，$B(-4，1)$ $\therefore$ $y=\overline{PA}+\overline{PB}$

$\because$ 點 P 的軌跡為 x 軸，取 B 對 x 軸的對稱點 $B'(-4，-1)$

$\therefore$ $y=\overline{PA}+\overline{PB}=\overline{PA}+\overline{PB'}=\overline{AB'}=10$ 為最小值

37 與直線$x-y-1=0$ 平行且相距為 2 之直線方程式為__________。

Ans： $x-y-1\pm 2\sqrt{2}=0$

詳解：設所求直線為 $x-y+k=0$，$k\in R$

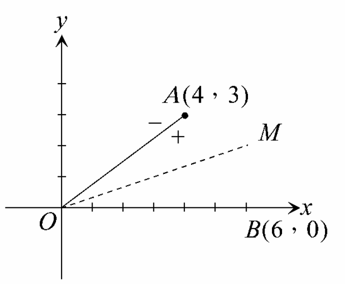
$\because$ 與 $x-y-1=0$ 相距為 2 $\Rightarrow$ $\frac{|k+1|}{\sqrt{2}}=2\Rightarrow$ $k=-1\pm 2\sqrt{2}$

$\therefore$ 所求直線為 $x-y-1\pm 2\sqrt{2}=0$

38 設$O(0，0)$，$A(4，3)$，$B(6，0)$，則$\angle AOB$之分角線方程式為__________。

Ans： $x-3y=0$

詳解：



如上圖

$\overleftrightarrow{OA}$之直線方程為 $3x-4y=0\cdots\cdots L_1$

$\overleftrightarrow{OB}$ 之直線方程式為$y=0\cdots\cdots L_2$

$\Rightarrow$ $\angle AOB$之角平分線M：$d_1=d_2$

$\Rightarrow$ $\frac{3x-4y}{5}=\frac{y}{1}$ $\Rightarrow$ $3x-4y=5y$ $\Rightarrow$ $3x-9y=0$

$\Rightarrow$ $x-3y=0$

39$A(1，2)$，$B(-3，4)$，$P(x，y)$是直線L：$x+y-5=0$ 上之任意點，則 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 之最小值 $=$__________。

Ans： $-\frac{1}{2}$

詳解：$A(1，2)$，$B(-3，4)$，$P(x，y)\in L$：$x+y-5=0$

$\Rightarrow$ 可令$x=t$，$y=5-t$，$t\in R$

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{PA}=(1-t，2-5+t)=(1-t，t-3)$

$\overrightarrow{PB}=(-3-t，4-5+t)=(-3-t，t-1)$

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(1-t)(-3-t)+(t-3)(t-1)=2t^2-2t=2(t-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}$

$\therefore$ 當$t=\frac{1}{2}$時，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 有最小值 $=-\frac{1}{2}$

40 設$P(2，1)$，直線L：$x=-1-2t$，$y=3+t$，若L上與P最近的點爲$Q(a，b)$，最近之距離爲d，則序數$(a，b，d)=$__________。

Ans： $(\frac{11}{5}，\frac{7}{5}，\frac{1}{\sqrt{5}})$

詳解：$Q(2-\frac{1\cdot(2+2-5)}{1^2+2^2}，1-\frac{2\cdot(2+2-5)}{1^2+2^2})\Rightarrow Q(\frac{11}{5}，\frac{7}{5})$

$d(P，L)=\left|\frac{2+2-5}{\sqrt{1^2+2^2}}\right|=\frac{1}{\sqrt{5}}\quad\therefore\quad(a，b，d)=(\frac{11}{5}，\frac{7}{5}，\frac{1}{\sqrt{5}})$

41 若θ 爲L_1：$2x+y-3=0$ 與L_2：$3x-y+4=0$ 所夾之銳角，則$\sin\theta=$__________。

Ans： $\frac{1}{\sqrt{2}}$

詳解：L_1：$2x+y-3=0\Rightarrow$ 法向量 $\overrightarrow{n_1}=(2，1)$

L_2：$3x-y+4=0\Rightarrow$ 法向量 $\overrightarrow{n_2}=(3，-1)$

θ 爲L_1，L_2所夾銳角$\Rightarrow\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\frac{|6-1|}{\sqrt{5}\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$

42 設$A(2，-1)$，$B(1，3)$，則$\overrightarrow{AB}$在直線L：$2x+3y=7$ 的分向量(正射影)爲__________。

Ans： $-\frac{11}{13}(3，-2)$

詳解：直線 L：$2x+3y=7$ 的方向向量爲$(3，-2)$

$\vec{a}$ 在$\vec{b}$ 的分向量（正射影）爲$(|\vec{a}|\cos\theta)\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2})\vec{b}$

$\therefore\overrightarrow{AB}=(-1，4)$在 L 的分向量 $=(-1，4)$ 在 $(3，-2)$的分向量

$=\frac{(-1,4)\cdot(3,-2)}{(\sqrt{13})^2}(3，-2)=-\frac{11}{13}(3，-2)$

43 (1)若點$P(1，a)$與直線$y=3$ 之距離爲 1 且P在第一象限，則$a=$__________。

(2)若點$P(b，-2)$與直線 $2x-5=0$ 之距離爲 6，則$b=$__________。

(3)若點$P(-2，5)$且至直線 $3x-3y=c$之距離爲 0，則$c=$__________。

Ans： (1) $a=4，2$ (2) $b=\frac{17}{2}$ 或 $-\frac{7}{2}$ (3) $c=14$

詳解：(1) $|a-3|=1\Rightarrow a=4$ 或 2，P 在第一象限 $\therefore\ a=4$ 或 2

(2) $|b-\frac{5}{2}|=6\Rightarrow b=\frac{17}{2}$ 或 $-\frac{7}{2}$

(3) $\frac{|-6+20-c|}{5}=0\Rightarrow c=14$

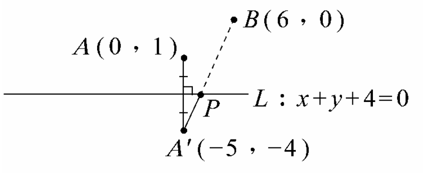
44. y平面上，點$A(0，1)$，$B(6，0)$，點P在直線 L：$x+y+4=0$ 上移動，則$\overline{PA}+\overline{PB}$的最小值爲__________，$|\overline{PA}+\overline{PB}|$ 之最大值爲__________。

Ans： $\sqrt{137}$，$\sqrt{37}$

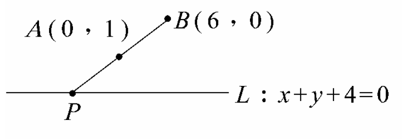
詳解：點 A，B 都在直線 L 的同側

$A(0，1)$對於 L 的對稱爲點 $A'(-5，-4)$，設 $\overline{A'B}$ 與直線 L 交於點 P，則

$\overline{PA}+\overline{PB}=\overline{PA'}+\overline{PB}=\overline{A'B}=\sqrt{137}$ 爲最小



設 $\overleftrightarrow{AB}$ 與直線 L 相交於點 P，則 $|\overline{PA}+\overline{PB}|=\overline{AB}=\sqrt{37}$ 爲最大

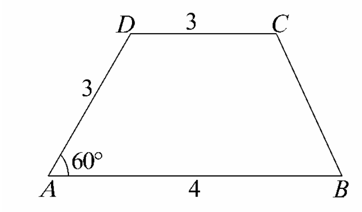


三、 計算題

1. 如下圖：

(1)梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}\,//\,\overline{DC}$，$\overline{AB}=4$，$\overline{AD}=\overline{DC}=3$，$\angle BAD=60°$，若 $\overrightarrow{AC}=x\,\overrightarrow{AB}+y\,\overrightarrow{AD}$，試求 x，y 之值。

(2)承上題，$\overrightarrow{BC}=x\,\overrightarrow{AB}+y\,\overrightarrow{AD}$，試求 x，y 之值。



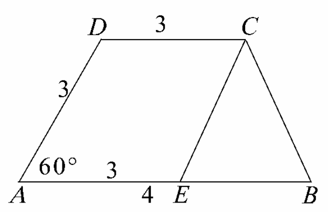
Ans： (1) $x=\dfrac{3}{4}$ ；$y=1$ (2) $x=-\dfrac{1}{4}$ ；$y=1$

詳解：

(1)如下圖：過 C 作直線 CE，使 $\overline{CE}\,//\,\overline{DA}$ 交 $\overline{AB}$ 於 E

$\Rightarrow\quad \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EC}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

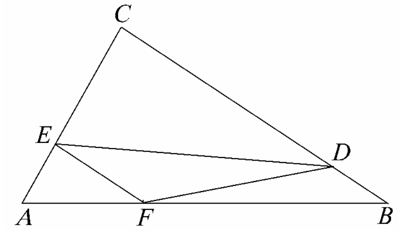
(2) $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$



2. $\triangle ABC$ 之三邊 $\overline{BC}$，$\overline{CA}$，$\overline{AB}$ 上分別各取一點 D，E，F，使 $\overrightarrow{DC}=4\,\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{EC}=2\,\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{FB}=2\,\overrightarrow{AF}$，設 G 爲$\triangle DEF$ 之重心，且 $\overrightarrow{OG}=x\,\overrightarrow{OA}+y\,\overrightarrow{OB}+z\,\overrightarrow{OC}$，$O$ 爲任意點，試求 x，y，z 之值。

Ans： $x=\dfrac{4}{9}$ ；$y=\dfrac{17}{45}$ ；$z=\dfrac{8}{45}$

詳解：



$D\in\overline{BC}$ ，$\overrightarrow{DC}=4\,\overrightarrow{BD}\quad\Rightarrow\quad\overline{BD}：\overline{DC}=1：4$

$E\in\overline{CA}$ ，$\overrightarrow{EC}=2\,\overrightarrow{AE}\quad\Rightarrow\quad\overline{CE}：\overline{EA}=2：1$

$F\in\overline{AB}$ ，$\overrightarrow{FB}=2\overrightarrow{AF}$ $\Rightarrow$ $\overline{AF}$ ：$\overline{FB}=1$：2

G 為△DEF 之重心，O 為任意點⇒ $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OE}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OF}$

$=\frac{1}{3}(\frac{4}{5}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{OC})+\frac{1}{3}(\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC})+\frac{1}{3}(\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB})$

$=\frac{4}{9}\overrightarrow{OA}+\frac{17}{45}\overrightarrow{OB}+\frac{8}{45}\overrightarrow{OC}$

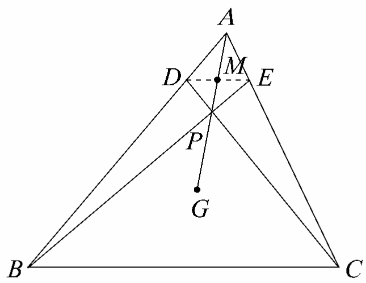
3. 設 G 為△ABC 之重心，P 為 $\overline{AG}$ 上的中點，$D\in\overline{AB}$ ，$E\in\overline{AC}$ ，$\overline{EB}$ 與 $\overline{DC}$ 交於 P 點，

(1)若 $\overrightarrow{AP}=r\overrightarrow{AD}+s\overrightarrow{AE}$ ，求 r，s 之値。

(2)若 $A(3，-2)$，$D(-3，4)$，$E(3，4)$，則四邊形 $ADPE$ 的面積為何？

Ans： (1) $r=\frac{5}{6}$ ，$s=\frac{5}{6}$ (2) 30 平方單位

詳解：



(1) $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ ，$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AG}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

$=(1-x)\overrightarrow{AB}+x\overrightarrow{AE}=y\overrightarrow{AD}+(1-y)\overrightarrow{AC}$

$\therefore$ $1-x=\frac{1}{6}$ ，$1-y=\frac{1}{6}$ $\Rightarrow$ $x=y=\frac{5}{6}$

$\Rightarrow$ $5\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}$ ，$5\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}$ $\therefore$ $\overrightarrow{AP}=\frac{5}{6}\overrightarrow{AD}+\frac{5}{6}\overrightarrow{AE}$

(2) $\overrightarrow{AD}=(-6，6)$，$\overrightarrow{AE}=(0，6)$，$\overrightarrow{DE}=(6，0)$

$\Rightarrow$ $\cos\angle DAE=\dfrac{|\overrightarrow{AD}|^2+|\overrightarrow{AE}|^2-|\overrightarrow{DE}|^2}{2|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{AE}|}=\dfrac{72+36-36}{2\cdot6\sqrt{2}\cdot6}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ $\angle DAE=45°$，$\triangle ADE=\frac{1}{2}\overline{AD}\cdot\overline{AE}\sin45°=18$

$\overrightarrow{AP}=\frac{5}{3}(\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE})=\frac{5}{3}\overrightarrow{AM}$ ，M 為 $\overline{DE}$ 中點

$\therefore$四邊形 $ADPE=\triangle ADP+\triangle AEP=\frac{5}{3}(\triangle ADM+\triangle AEM)=\frac{5}{3}\triangle ADE=\frac{5}{3}\times18=30$

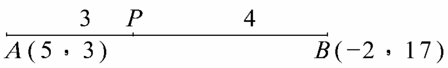
4. 平面上，設 $A(5，3)$，$B(-2，17)$，若 A，B，P 共線且 $\overline{AP}$ ：$\overline{PB}=3$：4，求 P 點之坐標。

Ans： 內分點 $P(2，9)$：外分點 $P(26，-39)$

詳解：

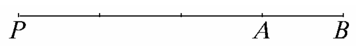
如下圖：利用分點公式

(1)內分點 $P(x，y)$



$\Rightarrow$ $\begin{cases} x=\dfrac{4\cdot5+3(-2)}{3+4}=\dfrac{14}{7}=2 \\ y=\dfrac{4\cdot3+3\cdot17}{3+4}=\dfrac{63}{7}=9 \end{cases}$

(2)外分點 $P(x，y)$



$$\Rightarrow \begin{cases} 5=\dfrac{1\cdot x+3(-2)}{3+1} \\ 3=\dfrac{1\cdot y+3\cdot 17}{3+1} \end{cases} \Rightarrow \quad x=26，y=-39$$

5. $\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6$，$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=-2\sqrt{3}$，$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{BA}=-5$，試求

(1) $|\overrightarrow{BC}|$　　(2)$\triangle ABC$ 之面積

Ans： (1) $\sqrt{7}$　　(2) $\sqrt{13}$

詳解：(1) $|\overrightarrow{BC}|^2=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}=5+2=7$，$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{7}$

(2) $|\overrightarrow{BA}|^2=\overrightarrow{BA}\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})=5+6=11\Rightarrow\ |\overrightarrow{BA}|=\sqrt{11}$

$$a\triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{BA}|^2\cdot|\overrightarrow{BC}|^2-(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{7\cdot 11-25}=\sqrt{13}$$

6. 設有一點 P 及一三角形 ABC，若 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，試求 $a\triangle PAB：a\triangle PBC：a\triangle PCA$。

Ans： 3：1：2

詳解：

$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，改爲以 P 爲起點

$\Rightarrow\ -\overrightarrow{PA}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PA})$

$\Rightarrow\ (1-\frac{1}{3}-\frac{1}{2})\overrightarrow{PA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{PB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{PC}=\vec{0}\Rightarrow\ \overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\vec{0}$

$\therefore\ a\triangle PAB：a\triangle PBC：a\triangle PCA=3：1：2$

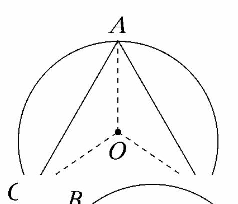
7. $\triangle ABC$ 之外接圓之圓心爲 O，半徑爲 2，令 $k=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$

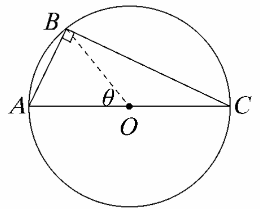
(1)若$\triangle ABC$ 爲正三角形，試求 k 之値。

(2)若$\triangle ABC$ 爲直角三角形，試求 k 之値。

(3)若$\triangle ABC$ 爲等腰三角形，且 $k=3$，試求底邊上之高。

Ans： (1) -6　　(2) -4　　(3) $3-\frac{3}{2}\sqrt{2}$





詳解：(1)$\triangle ABC$爲正三角形，如右圖：

$\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=\frac{2\pi}{3}$，$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=2$

$\Rightarrow\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=2\cdot 2\cos 120^\circ=-2$

$\therefore\ k=-6$

(2)$\triangle ABC$爲直角三角形，如右圖：

令$\angle B=\frac{\pi}{2}$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=2\cdot 2\cos 180^\circ=-4$

令$\angle AOB=\theta\ \Rightarrow\ \angle BOC=\pi-\theta$

$\Rightarrow\quad \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=2\cdot 2[\cos\theta+\cos(\pi-\theta)]=0$

$\therefore\quad k=-4+0=-4$

(3)$\triangle ABC$為等腰三角形，如右圖

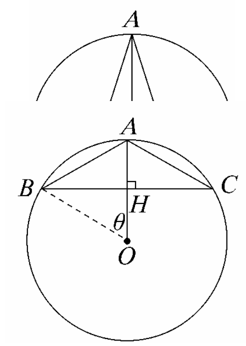
$\because\quad \overline{AB}=\overline{AC}\quad\therefore\quad$ 可令$\angle AOB=\angle BOC=\theta$

$\Rightarrow\quad \angle BOC=2\pi-2\theta$

$\Rightarrow\quad \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=2\cdot 2\cos\theta=4\cos\theta$

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=2\cdot 2\cos\theta(2\pi-2\theta)=4\cos 2\theta$

由$k=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=3$



$\Rightarrow\quad 4\cos 2\theta+4\cos\theta+4\cos\theta=3$

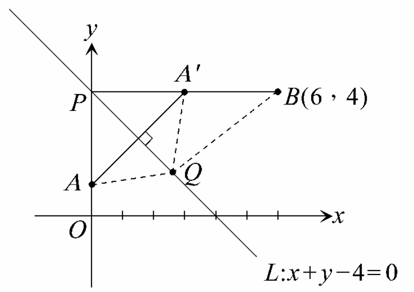
$\Rightarrow\quad 4(2\cos^2\theta-1)+8\cos\theta=3\quad\Rightarrow\quad 8\cos^2\theta+8\cos\theta=3$

$\Rightarrow\quad \cos\theta=\dfrac{-2+3\sqrt{2}}{4}$（$\because\quad -1\le\cos\theta\le 1$）

$\because\quad \cos\theta>0\quad\Rightarrow\quad \angle A$為鈍角，如右圖：

$\Rightarrow\quad \overline{AH}=\overline{OA}-\overline{OH}=2-2\cos\theta\ =2-2\cdot\dfrac{-2+3\sqrt{2}}{4}=3-\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$

8. 設平面上有一直線L：$x+y-4=0$及二點$A(0,1)$，$B(6,4)$，試在L上找一點P，使$|\overline{PA}-\overline{PB}|$為最大。



Ans：$P(0，4)$

詳解：

如右圖

作A關於L之對稱點A'

連接$\overleftrightarrow{BA'}$交L於P，此P即為所求

任取L上異於P之任一點Q

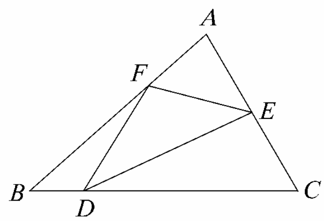
$\Rightarrow\quad |\overline{QA}-\overline{QB}|=|\overline{QA'}-\overline{QB}|<\overline{A'B}=|\overline{PB}-\overline{PA'}|=|\overline{PB}-\overline{PA}|=|\overline{PA}-\overline{PB}|$

(2) $A(0，1)$，L：$x+y-4=0\Rightarrow\quad A$關於$L$之對稱點$A'$：$\begin{cases}x=0-2\cdot\dfrac{-3}{2}=3\\ y=1-2\cdot\dfrac{-3}{2}=4\end{cases}$

(3) $A'(3，4)$，$B(6，4)\quad\Rightarrow\quad \overleftrightarrow{A'B}$之方程式為$y=4$

解$\begin{cases}y=0\\ x+y-4=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x=0\\ y=4\end{cases}$，即$P(0，4)$

9.ABC的三邊$\overline{BC}$，$\overline{CA}$，$\overline{AB}$上，分別取D，E，F三點，使$\overline{DC}=4\overline{BD}$，$\overline{BC}=\overline{AE}$，$\overline{FB}=2\overline{AF}$，$G$為$\triangle DEF$的重心，$\overrightarrow{AG}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，求$x$，$y$的值。



Ans：$x=\dfrac{17}{45}$，$y=\dfrac{7}{30}$

詳解：

$\because\quad G$為$\triangle DEF$的重心

$\therefore\quad 3\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}$

$=(\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC})+(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC})+(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB})=\frac{17}{15}\overrightarrow{AB}+\frac{7}{10}\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow\quad \overrightarrow{AG}=\frac{17}{45}\overrightarrow{AB}+\frac{7}{30}\overrightarrow{AC}\quad\therefore\quad x=\frac{17}{45}$，$y=\frac{7}{30}$

10.設△ABC 為直角△，已知 $\overrightarrow{AB}=(3，k)$，$\overrightarrow{AC}=(2，1)$，求實數 k 之值。

Ans：-1 或 -6

詳解：

① $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=(-3，-k)+(2，1)=(-1，1-k)$

②當$\angle A=90°$時，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0\quad\Rightarrow(3，k)\cdot(2，1)=0\quad\Rightarrow k=-6$

當$\angle B=90°$，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0\quad\Rightarrow(-3，-k)\cdot(-1，1-k)=0\Rightarrow k^2-k+3=0$（不合，$D<0$）

當$\angle C=90°$時，$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0\Rightarrow\quad(1，k-1)\cdot(-2，-1)=0\quad\Rightarrow\quad k=-1$