高雄市明誠中學 高三(上)數學複習測驗					日期：92.11.14
範圍	Book2-Chap3 三角函數(3)	班級 座號	普三 班	姓名	

一、選擇題 (每題 8 分)

1.(　　) 將函數 $y=\sin x$ 的圖形由 y 軸左右往中央壓縮為 $\frac{1}{2}$，再向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 個單位，所得新圖形的函數為

(A) $y=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$　(B) $y=\sin(2x-\frac{\pi}{6})$　(C) $y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$　(D) $y=\sin(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3})$

(E) $y=\sin(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6})$

Ans：. (C)

解析：

$$y=\sin x\xrightarrow{\text{壓縮}\frac{1}{2}}y=\sin 2x\xrightarrow{\text{向左平移}\frac{\pi}{6}}y=\sin(2x+\frac{\pi}{6})=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$$

2.(　　) $\sqrt{3}\tan20^\circ+\sqrt{3}\tan10^\circ+\tan20^\circ\tan10^\circ=$

(A) $\sqrt{3}$　(B) $-\sqrt{3}$　(C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$　(D) 1　(E) -1。

Ans：　(D)

解析：

$$\tan(20^\circ+10^\circ)=\frac{\tan20^\circ+\tan10^\circ}{1-\tan20^\circ\cdot\tan10^\circ}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\tan20^\circ+\tan10^\circ}{1-\tan20^\circ\cdot\tan10^\circ}$$

$$\sqrt{3}\tan20^\circ+\sqrt{3}\tan10^\circ=1-\tan20^\circ\cdot\tan10^\circ$$

$$\sqrt{3}\tan20^\circ+\sqrt{3}\tan10^\circ+\tan20^\circ\tan10^\circ=1$$

3.(　　) 設 $f(x)=2\sin(30^\circ-x)-2\cos x$，$-60^\circ\le x\le210^\circ$，若 $f(x)$ 在 $x=\alpha$ 處有最大值 M，在 $x=\beta$ 處有最小值 m，下列何者正確？(複選)

(A) $M=2$　(B) $\alpha=210^\circ$　(C) $m=-2$　(D) $\beta=60^\circ$　(E) $M-m=4$

Ans：(B)(C)(D)

解析：

$$f(x)=2\sin(30^\circ-x)-2\cos x=2\sin30^\circ\cos x-2\cos30^\circ\sin x-2\cos x$$

$$=-\cos x-\sqrt{3}\sin x=-2(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x)$$

$$=-2(\sin x\cos30^\circ+\cos x\sin30^\circ)=-2\sin(x+30^\circ)$$

且 $-30^\circ\le x+30^\circ\le240^\circ\Rightarrow-\frac{\sqrt{3}}{2}\le\sin(x+30^\circ)\le1$

$\sin(x+\frac{\pi}{6})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 時，$M=-2\times(-\frac{\sqrt{3}}{2})=\sqrt{3}$，此時 $\alpha+30^\circ=240^\circ\Rightarrow\alpha=210^\circ$

$\sin(x+\frac{\pi}{6})=1$ 時，$m=-2\times1=-2$，此時 $\beta+30^\circ=90^\circ\Rightarrow\beta=60^\circ$

二、填充題：(每題 10 分)

1. 以$x-\cos40°$除$f(x)=3x-4x^3$之餘式為__________。

Ans： $\frac{1}{2}$

解析：

由餘式定理以$x-\cos40°$除$f(x)=3x-4x^3$的餘式為$f(\cos40°)$

$$f(\cos40°)=3\cos40°-4\cos^3 40°=-(4\cos^3 40°-3\cos40°)$$
$$=-\cos(3\times40°)=-\cos120°=-(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$$

2. 設$\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，$\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$，則$\sin\frac{\alpha}{2}$ = __________。

Ans： $\frac{3}{\sqrt{10}}$

解析：

$\because$ $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，$\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ $\therefore$ $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$

$\because$ $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ $\Rightarrow$ $\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}<\frac{3\pi}{4}$，$\therefore$ $\sin\frac{\alpha}{2}>0$ 且 $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

$$\Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-(-\frac{4}{5})}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{2}}=\sqrt{\frac{9}{10}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

3. 設$\cos2\theta=\frac{3}{5}$，$\sin2\theta<0$，則$\tan\theta+\cot\theta=$ __________

Ans：$-\frac{5}{2}$

解析：

$\cos2\theta=\frac{3}{5}$，$\sin2\theta<0\Rightarrow 2\theta$於第三象限，$\sin2\theta=-\frac{4}{5}$

$$\tan\theta+\cot\theta=\frac{1}{\sin\theta\cdot\cos\theta}=\frac{1}{\frac{1}{2}\sin2\theta}=\frac{2}{\sin2\theta}=-\frac{5}{2}$$

4. 設 $0°<\theta<90°$，且$\sin\theta\cdot\cos\theta=\frac{1}{2}$，試求下列各式之值：

(1) $\sec\theta+\csc\theta=$____________。

(2) $\frac{1}{1+\sin\theta}+\frac{1}{1+\cos\theta}$ =___________。

Ans： (1) $2\sqrt{2}$ (2) $4-2\sqrt{2}$

解析：

因為$\sin\theta\cdot\cos\theta=\frac{1}{2}$，而$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，故得

$(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + 2\sin\theta\cos\theta = 1 + 2\cdot\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad (\sin\theta + \cos\theta)^2 = 2$

因爲 $0° < \theta < 90°$，故$\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$

(1) $\sec\theta + \csc\theta = \frac{1}{\cos\theta} + \frac{1}{\sin\theta} = \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\cos\theta\sin\theta} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$

(2)又因爲$\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$，$\sin\theta\cdot\cos\theta = \frac{1}{2}$，

故 $\frac{1}{1+\sin\theta} + \frac{1}{1+\cos\theta} = \frac{(1+\cos\theta)+(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)\cdot(1+\cos\theta)} = \frac{2+(\cos\theta+\sin\theta)}{1+(\cos\theta+\sin\theta)+\cos\theta\cdot\sin\theta}$

$= \frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}+\frac{1}{2}} = \frac{2(2+\sqrt{2})}{3+2\sqrt{2}} = 4 - 2\sqrt{2}$

5. 設$\tan\alpha$，$\tan\beta$爲 $2x^2 - 4x + 1 = 0$ 的二根，則 $2\sin^2(\alpha+\beta) - 4\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) + 4\cos^2(\alpha+\beta)$之値爲__________。

Ans：$-\frac{20}{17}$

解析：

$\tan\alpha + \tan\beta = 2$，$\tan\alpha\tan\beta = \frac{1}{2}$，$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = 4$

$2\sin^2(\alpha+\beta) - 4\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) + 4\cos^2(\alpha+\beta)$

$= \cos^2(\alpha+\beta)\,[2\tan^2(\alpha+\beta) - 4\tan(\alpha+\beta) + 4]$

$= \frac{1}{\sec^2(\alpha+\beta)}\ [2\tan^2(\alpha+\beta) - 4\tan(\alpha+\beta) + 4]$

$= \frac{1}{1+\tan^2(\alpha+\beta)}\ (2\times 16 - 4\times 4 + 4) = \frac{20}{17}$

6. $\cos40°\sin160° - \sin220°\cos340° =$ __________，而$(1 + \tan35°)(1 + \tan10°) =$ __________。

Ans：$\frac{\sqrt{3}}{2}$；2

解析：利用和角公式

(1) $\cos40°\sin160° - \sin220°\cos340° = \cos40°\sin20° + \sin40°\cos20°$

$= \sin20°\cos40° + \cos20°\sin40° = \sin(20° + 40°) \quad = \sin60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

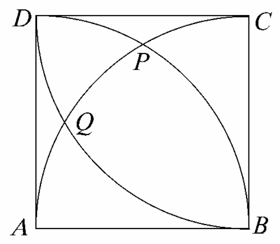
(2)$\because\ 35° + 10° = 45° \qquad \therefore\ \tan(35° + 10°) = \tan45° \Rightarrow \frac{\tan35° + \tan10°}{1 - \tan35°\tan10°} = 1$

$\Rightarrow\ \tan35° + \tan10° = 1 - \tan35°\tan10°$

$\Rightarrow\ \tan35°\cdot\tan10° + \tan35° + \tan10° = 1$

$\therefore\ (1 + \tan35°)(1 + \tan10°) \quad = 1 + (\tan35°\cdot\tan10° + \tan35° + \tan10°) = 1 + 1 = 2$

7. 如下圖，正方形ABCD的邊長爲 1，各以A，B，C爲圓心，邊長 1 爲半徑，在正方形內畫圓弧 $\overset{\frown}{DPB}$ ，$\overset{\frown}{AQPC}$ 及 $\overset{\frown}{DQB}$ ，則



(1)兩弧 $\overset{\frown}{DPB}$ 與 $\overset{\frown}{DQB}$ 所夾眼形的面積爲__________。

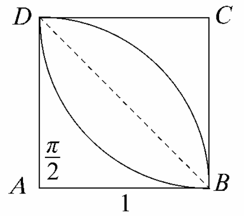
(2)兩弧 $\overset{\frown}{AQP}$ ，$\overset{\frown}{PB}$ 與一邊 $\overline{AB}$ 所夾區域的面積爲__________。

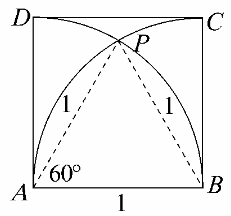
Ans： (1) $\frac{\pi}{2}-1$ (2) $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$

解析：

(1)所求面積 $=2(\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1)=\frac{\pi}{2}-1$

(2)所求面積 $=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 1^2+2(\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\sin\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$





8. $y=3\sin x-4\cos x$，當 $x=\alpha$ 時，y有最大值，求 $\tan\frac{\alpha}{2}=$ __________。

Ans：3

解析：

$y=3\sin x-4\cos x=5(\frac{3}{5}\sin x-\frac{4}{5}\cos x)=5\sin(x-\phi)$，其中 $\cos\phi=\frac{3}{5}$ ，$\sin\phi=\frac{4}{5}$

當 $\sin(x-\phi)=1$，即 $x-\phi=\frac{\pi}{2}+2n\pi$，$n\in Z$ 時，y 有最大值 5

$\therefore\quad \alpha=\phi+\frac{\pi}{2}+2n\pi$，$n\in Z$， $\tan\alpha=\tan[\phi+\frac{\pi}{2}+2n\pi]=-\cot\phi=-\frac{3}{4}$

$$\Rightarrow\quad \tan\alpha=\frac{\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\alpha}{2}}\Rightarrow -\frac{3}{4}=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

設 $t=\tan\frac{\alpha}{2}>0$ ($\frac{\alpha}{2}=\frac{\phi}{2}+\frac{\pi}{4}+n\pi$ 於第一、三象限) $\Rightarrow\frac{-3}{4}=\frac{2t}{1-t^2}$

$\Rightarrow\quad 3t^2-8t-3=0,(3t+1)(t-3)=0,t=-\frac{1}{3},3\qquad\therefore\quad\tan\frac{\alpha}{2}=3$

9. 設 $f(x)=2\sqrt{3}\sin(x+\frac{\pi}{6})-4\sin x$，則

(1) $f(x)$之最大值爲__________。 (2) $f(x)$之最小值爲__________。

Ans：(1) 2 (2) -2

解析：

$f(x)=2\sqrt{3}\sin(x+\frac{\pi}{6})-4\sin x$

$= 2\sqrt{3}(\sin x\cos\frac{\pi}{6}\ \ x + \cos x\sin\frac{\pi}{6}) - 4\sin x$

$= 2\sqrt{3}(\ \sin x\ \ \frac{\sqrt{3}}{2}\ \ + \cos x\ \ \frac{1}{2}\ \ ) - 4\sin x$

$= -\sin x + \sqrt{3}\cos x = -2(\sin x\ \ \frac{1}{2}\ \ - \cos x\ \ \frac{\sqrt{3}}{2})$

$= -2\sin(x - \ \frac{\pi}{3})$

①當 $\sin(x - \ \frac{\pi}{3}) = -1$ 時，$f(x)$最大值 $M = 2$

②當 $\sin(x - \ \frac{\pi}{3}) = 1$ 時，$f(x)$最小值 $m = -2$

10. $f(x) = (\sin x + \cos x)^2 + 4(\sin x + \cos x)$，則

(1) $f(x)$之最小值爲__________。　　(2) $f(x)$之最大值爲__________。

Ans：(1) $2 - 4\sqrt{2}$　　　(2) $2 + 4\sqrt{2}$

解析：

設$t = \sin x + \cos x$，得

$t = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) = \sqrt{2}\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4} + \cos x\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})$

故$-1 \le \sin(x + \frac{\pi}{4}) \le 1$，故$-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$

又$f(x) = (\sin x + \cos x)^2 + 4(\sin x + \cos x)$

$= t^2 + 4t = (t + 2)^2 - 4$，其中 $-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$

①當$t = \ \sqrt{2}$ 時，$f(x)$有最大值 $2 + 4\sqrt{2}$

②當$t = -\sqrt{2}$ 時，$f(x)$有最小值 $2 - 4\sqrt{2}$

11. 設 $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$，$f(x) = 2 + 2(\sin x + \cos x) - \sin 2x$，則$\sin x + \cos x$的範圍爲__________。

若$f(x)$在$x = x_1$時有最大值M；在$x = x_2$時有最小值爲m，則數對$(x_1，M) =$ __________，$(x_2，m) =$ __________。

Ans：$1 \le \sin x + \cos x \le \sqrt{2}$；　　$(x_1，M) = (0，4)，(\frac{\pi}{2}，4)$；　　$(x_2，m) = (0，1 + 2\sqrt{2})$

解析：

(1)令$t = \sin x + \cos x$，得

$t = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) = \sqrt{2}\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4} + \cos x\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})$

$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$，故$\frac{\sqrt{2}}{2} \le \sin(x + \frac{\pi}{4}) \le 1$，故 $1 \le t \le \sqrt{2}$

(2)將$t = \sin x + \cos x$兩邊平方，得$\sin x\cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$。

又$f(x) = 2 + 2(\sin x + \cos x) - 2\sin x\cos x$

故$f(x)=2+2t-(t^2-1)=-(t^2-2t+1)+4=-(t-1)^2+4$，其中 $1\le t\le\sqrt{2}$

①當$t=1$時，此時$x=0$或$x=\frac{\pi}{2}$，$f(x)$有最大值 4

②當$t=\sqrt{2}$時，此時$x=\frac{\pi}{4}$，$f(x)$有最小值 $1+2\sqrt{2}$

12. 設$\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{3\pi}{4}$，試求函數$f(x)=\frac{\sin x\cos x}{1+\sin x+\cos x}$的最大值與最小值。

Ans： 最大值$\frac{\sqrt{2}-1}{2}$；最小值$-\frac{1}{2}$

解析：

(1)令 $t=\sin x+\cos x$，得

$$t=\sqrt{2}\,(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x)=\sqrt{2}\,(\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$$

$\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{3\pi}{4}$ ，$\frac{\pi}{2}\le x+\frac{\pi}{4}\le\pi$，故$0\le\sin(x+\frac{\pi}{4})\le 1$，故 $0\le t\le\sqrt{2}$

(2)將 $t=\sin x+\cos x$ 兩邊平方，得 $\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$ 。

$$又\ f(x)=\frac{\sin x\cos x}{1+\sin x+\cos x}=\frac{\frac{t^2-1}{2}}{1+t}=\frac{t-1}{2}$$

①當 $t=\sqrt{2}$ 時，$f(x)$有最大值$\frac{\sqrt{2}-1}{2}$； ②當 $t=0$ 時，$f(x)$有最小值 $-\frac{1}{2}$

13. 求下列各值：

(1) $\sin 15^\circ=$ ＿＿＿＿＿＿ 。

(2) $\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}=$ ＿＿＿＿＿＿ 。

(3) $\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ=$ ＿＿＿＿＿＿ 。

Ans：. (1)$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (2) 2 (3)$\frac{1}{8}$

解析：

$$(1)\ \sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$(2)原式=\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}+\frac{1+\cos\frac{3\pi}{4}}{2}+\frac{1+\cos\frac{5\pi}{4}}{2}+\frac{1+\cos\frac{7\pi}{4}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\times 4+\frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{3}{4}\pi+\cos\frac{5}{4}\pi+\cos\frac{7}{4}\pi)$$

$$=2+\frac{1}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2})=2$$

(3) $\cos 20°\cos 40°\cos 80° = \dfrac{2\sin 20°\cos 20°\cos 40°\cos 80°}{2\sin 20°}$

$= \dfrac{\sin 40°\cos 40°\cos 80°}{2\sin 20°} = \dfrac{\frac{1}{2}\sin 80°\cos 80°}{2\sin 20°} = \dfrac{\frac{1}{2}\sin 160°}{4\sin 20°} = \dfrac{\sin 20°}{8\sin 20°} = \dfrac{1}{8}$

14. 若$\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$且$\sin 2\theta = \dfrac{4}{5}$，求$\sin\theta =$ __________ 。

Ans：. $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

解析：

$\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \dfrac{\pi}{2} < 2\theta < \pi$ ，$\sin 2\theta = \dfrac{4}{5} \Rightarrow \cos 2\theta = -\dfrac{3}{5}$

$\sin\theta = +\sqrt{\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\dfrac{1-(-\frac{3}{5})}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

15. 設$\sin\theta - \cos\theta = \dfrac{4}{3}$，則$\sin 3\theta + \cos 3\theta =$ __________ 。

Ans：$\dfrac{20}{27}$

解析：

$\sin\theta - \cos\theta = \dfrac{4}{3}$ 兩邊平方$\Rightarrow$ $1 - 2\sin\theta\cos\theta = \dfrac{16}{9} \Rightarrow$ $\sin\theta\cos\theta = -\dfrac{7}{18}$

$\therefore$ $\sin 3\theta + \cos 3\theta$

$= (3\sin\theta - 4\sin^3\theta) + (4\cos^3\theta - 3\cos\theta)$

$= 3(\sin\theta - \cos\theta) - 4(\sin^3\theta - \cos^3\theta)$ $\Leftarrow a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$

$= 3 \cdot \dfrac{4}{3} - 4[(\sin\theta - \cos\theta)^3 + 3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta - \cos\theta)]$

$= 4 - 4\left(\dfrac{64}{27} + 3 \cdot \dfrac{-7}{18} \cdot \dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{20}{27}$