高雄市明誠中學 高三(上)數學複習測驗 日期：92.11.07					
範圍	Book2-Chap2 三角函數(2)	班級	普三 班	姓名	
		座號			

一、選擇題 (每題 8 分)

1.( ) 設$x^2-(\tan\theta+\cot\theta)\,x+1=0$ 有一根為 $2+\sqrt{3}$ ，（$0°<\theta<90°$），下列何者錯誤？

(A) $\tan\theta+\cot\theta=4$ (B) $\sec\theta\csc\theta=4$ (C) $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ (D) $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(E)另一根為 $2-\sqrt{3}$

Ans： (D)

解析：另一根為$\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$

(A) $\tan\theta+\cot\theta=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$

(B) $\tan\theta+\cot\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}=4\Rightarrow$ $\sec\theta\cos\theta=4$

(C) $1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{3}{2}$ $\Rightarrow$ $(\sin\theta+\cos\theta)^2=\dfrac{3}{2}\Rightarrow$ $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

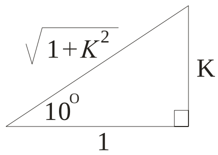
(D)$1-2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $\sin\theta-\cos\theta=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

2.( ) 已知 $\cot260°=k$，下列何者正確？(複選)

(A) $\sin260°=\dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}}$ (B) $\cos10°=\dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}}$ (C) $\tan10°=-k$

(D) $\sec260°=-\dfrac{\sqrt{1+k^2}}{k}$ (E) $\csc10°=\dfrac{\sqrt{1+k^2}}{k}$

Ans： (B) (D) (E)



解析： $\cot260°=k$ $\Rightarrow$ $\cot(270°-10°)=k$ $\Rightarrow$ $\tan10°=k$ $\Rightarrow$

$\therefore$(A) $\sin260°=\sin(270°-10°)=-\cos10°=\dfrac{-1}{\sqrt{1+k^2}}$ ，

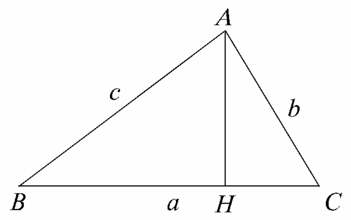
(B)$\cos10°=\dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}}$ (C) $\tan10°=k$ (D) $\sec260°=-\csc10°=\dfrac{\sqrt{1+k^2}}{-k}$

(E) $\csc10°=\dfrac{\sqrt{1+k^2}}{k}$

3.( ) 設△ABC 中的三頂點 A，B，C 所對邊長分別為 a，b，c，$\overline{AH}$ 為高，則$\overline{AH}$ 之長為 (A) $b\cdot\sin B$ (B) $c\cdot\sin C$ (C) $b\cdot\sin C$ (D) $c\cdot\sin B$ (E) $a\cdot\sin A$

Ans： (C)(D)

解析：



如圖，在△AHB 中，可得$\overline{AH}=c\sin B$

而在△AHC 中，可得$\overline{AH}=b\sin C$

故(C)(D)為真

二、填充題：(每題 10 分)

1. 設θ爲銳角，若$\sin\theta$與$\cos\theta$爲方程式 $3x^2-4x+k=0$ 兩根，並且$\tan\theta$與$\cot\theta$也爲方程式$x^2+px+q=0$ 兩根，則常數$k=$__________，而數對$(p，q)=$__________。

Ans： $\frac{7}{6}$，$(-\frac{18}{7}，1)$

解析：

因爲$\sin\theta$與$\cos\theta$爲方程式 $3x^2-4x+k=0$ 兩根

由根與係數關係知

$$\begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=\frac{4}{3}\cdots\cdots ① \\ \sin\theta\cdot\cos\theta=\frac{k}{3}\cdots\cdots ②\end{cases}$$

將①平方，得　$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{16}{9}$　$\Leftrightarrow$　$\sin\theta\cos\theta=\frac{7}{18}$

由②可得　$k=3\sin\theta\cos\theta=3\cdot\frac{7}{18}=\frac{7}{6}$

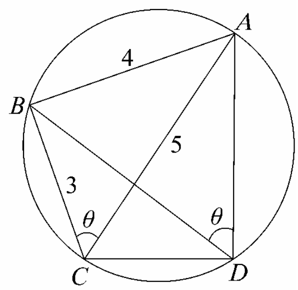
其次，又因爲$\tan\theta$與$\cot\theta$也爲方程式$x^2+px+q=0$ 兩根

同理知$\begin{cases}\tan\theta+\cot\theta=-p\ \cdots\cdots ③ \\ \tan\theta\cdot\cot\theta=q\cdots\cdots ④\end{cases}$

由③可得$p=-(\tan\theta+\cot\theta)=-(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta})=-\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=-\frac{18}{7}$

再由④可得$q=\tan\theta\cdot\cot\theta=1$　，故數對$(p，q)=(-\frac{18}{7}，1)$

2. 已知$ABCD$爲一圓內接四邊形，$\overline{AC}$ 爲直徑，若$\overline{AC}=5$，$\overline{AB}=4$，$\angle ADB=\theta$，則 $\sin\theta+\cos\theta=$__________。



Ans： $\frac{7}{5}$

解析：

如上圖所示：因爲$ABCD$爲一圓內接四邊形，而$\overline{AC}$ 爲直徑，$\overline{AC}=5$，$\overline{AB}=4$，故由畢氏定理可得$\overline{BC}=3$

$\angle ACB$及$\angle ADB$爲同弧所對的圓周角，故$\angle ACB=\angle ADB=\theta$

在$\triangle ABC$中，因爲$\angle ABC=90°$，於是$\sin\theta+\cos\theta=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}=\frac{7}{5}$ 4.

3. θ是一個銳角，滿足 $6\sin^2\theta-5\sin\theta\cos\theta-4\cos^2\theta=0$，求$\tan\theta=$__________。

Ans：$\frac{4}{3}$

解析： $6\sin^2\theta-5\sin\theta\cos\theta-4\cos^2\theta=0$

$$\Rightarrow\quad 6\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-5\frac{\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta}-4=0$$

$$\Rightarrow\quad 6\tan^2\theta-5\tan\theta-4=0$$

$$\Rightarrow\quad (2\tan\theta+1)(3\tan\theta-4)=0\quad\Rightarrow\quad \tan\theta=\frac{4}{3}$$

4. 設 $0° < \theta < 90°$，且$\sin\theta \cdot \cos\theta = \dfrac{1}{2}$，試求下列各式之值：

(1) $\sec\theta + \csc\theta =$＿＿＿＿＿＿＿。

(2) $\dfrac{1}{1+\sin\theta} + \dfrac{1}{1+\cos\theta} =$＿＿＿＿＿＿。

Ans： (1) $2\sqrt{2}$ (2) $4 - 2\sqrt{2}$

解析：

因爲$\sin\theta \cdot \cos\theta = \dfrac{1}{2}$，而$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$，故得

$(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + 2\sin\theta\cos\theta = 1 + 2 \cdot \dfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad (\sin\theta + \cos\theta)^2 = 2$

因爲 $0° < \theta < 90°$，故$\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$

(1) $\sec\theta + \csc\theta = \dfrac{1}{\cos\theta} + \dfrac{1}{\sin\theta} = \dfrac{\sin\theta + \cos\theta}{\cos\theta\sin\theta} = \dfrac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$

(2)其次，因爲$\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$ 且$\sin\theta \cdot \cos\theta = \dfrac{1}{2}$，故

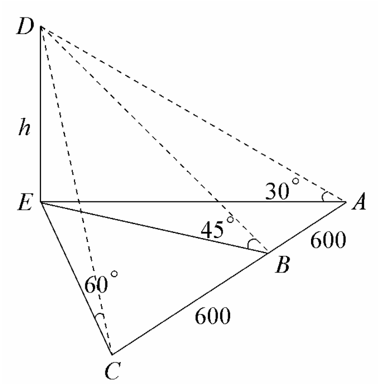
$$\frac{1}{1+\sin\theta} + \frac{1}{1+\cos\theta} = \frac{(1+\cos\theta)+(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)\cdot(1+\cos\theta)} = \frac{2+(\cos\theta+\sin\theta)}{1+(\cos\theta+\sin\theta)+\cos\theta\cdot\sin\theta}$$

$$= \frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}+\frac{1}{2}} = \frac{2(2+\sqrt{2})}{3+2\sqrt{2}} = 4 - 2\sqrt{2}$$

5. 地面上共線的三點A，B，C測得一塔頂的仰角各爲 30°，45°，60°，已知A，B，C與塔底不共線，且 $\overline{AB} = \overline{BC} = 400$(公尺)，則塔高爲＿＿＿＿＿公尺。

Ans： $200\sqrt{6}$

解析：



設塔爲h ∴ $\overline{AE} = \sqrt{3}h$，$\overline{BE} = h$，$\overline{CE} = \dfrac{h}{\sqrt{3}}$

在△ACE中，利用三角形中線定理

∴ $\overline{AE}^2 + \overline{CE}^2 = 2(\overline{BE}^2 + \overline{AB}^2)$

∴ $(\sqrt{3}h)^2 + (\dfrac{h}{\sqrt{3}})^2 = 2(h^2 + 400^2)$

∴ $h = 200\sqrt{6}$

6. 設$f(x) = \sqrt{3}\sin x - \cos x + 6$，$0 < x \le 2\pi$，則$y = f(x)$圖形上的最低點坐標爲＿＿＿＿＿。

Ans： $(\dfrac{5\pi}{3}, 4)$

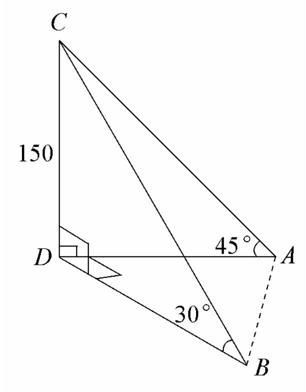
解析：$f(x) = \sqrt{3}\sin x - \cos x + 6 = 2(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \dfrac{1}{2}\cos x) + 6 = 2\sin(x - 30°) + 6$

當 $x - 30° = 270° \quad \Rightarrow \quad x = 300° = \dfrac{5\pi}{3}$時，$f(x) = 4$ 爲最小值

$\therefore$ $y = f(x)$圖形上的最低點坐標爲($\frac{5\pi}{3}$，4)

7. 有一塔高 150 公尺，石頭A在塔的正東方，石頭B在塔的正南方，若自塔頂測得A，B的俯角各爲 45°，30°，則$\overline{AB}$ = __________公尺。

Ans： 300



解析：

自A測塔頂的仰角爲 45°，自B測塔頂的仰角爲 30°

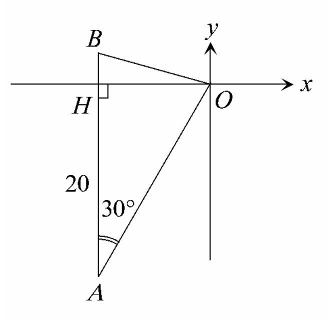
如圖，$\overline{AD} = 150$，$\overline{BD} = 150\sqrt{3}$ ，但$\angle ADB = 90°$

$\therefore$ $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = 150^2(1+3) = 4(150^2)$

$\therefore$ $\overline{AB} = 2 \times 150 = 300$(公尺)

8. 一島在船之北$30°$東，此船往北行駛 20 公里後，發現島在南$60°$東，則船與島之最近距離爲__________公里。

Ans：$5\sqrt{3}$



解析：

設島爲原點 O，如右圖

$30°-60°-90°$定理知$\overline{OB} = 10$ ，$\overline{OA} = 10\sqrt{3}$

$\therefore$ $\overline{OH} = \frac{10 \cdot 10\sqrt{3}}{20} = 5\sqrt{3}$

9. 化簡$\frac{\sin(180°-\theta)}{\sin(\theta-360°)} - \frac{\tan(\theta-90°)}{\cot(180°+\theta)} - \frac{\sin(\theta-270°)}{\cos(\theta-180°)} =$ __________ 。

Ans：3

解析：

$$\frac{\sin(180°-\theta)}{\sin(\theta-360°)} - \frac{\tan(\theta-90°)}{\cot(180°+\theta)} - \frac{\sin(\theta-270°)}{\cos(\theta-180°)} = \frac{\sin\theta}{\sin\theta} - \frac{-\cot\theta}{\cot\theta} - \frac{\cos\theta}{-\cos\theta} = 1+1+1 = 3$$

10. 在$\triangle ABC$ 中，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 之三對邊長分別爲 a，b，c，若滿足 $3(a-b+c) = 14(\sin A - \sin B + \sin C)$，則此三角形的外接圓半徑 $R =$______________ 。

Ans：$\frac{7}{3}$

解析：

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$，

$\therefore$ $a-b+c = 2R(\sin A - \sin B + \sin C) = \frac{14}{3}(\sin A - \sin B + \sin C)$

$\therefore$ $R = \frac{7}{3}$

11. 圓內接四邊形$ABCD$中，$\overline{AB} = 12$，$\overline{BC} = 5$，$\overline{AC} = 13$，$\angle BAD = 60°$，則：

(1) $\overline{BD} =$_____________ 。 (2) $\overline{AD} =$________________ 。

Ans：(1) $\dfrac{13\sqrt{3}}{2}$　　(2) $\dfrac{5\sqrt{3}+12}{2}$

12. a，b，c爲△ABC三邊長，若 $2a-b-c=0$ 且$a-4b+2c=0$，求$\cos A$：$\cos B$：$\cos C=$ ___ 。

Ans：.19：25：7

解析：

$$\begin{cases}2a-b-c=0\\ a-4b+2c=0\end{cases}\Rightarrow\quad a:b:c=\begin{vmatrix}-1&-1\\-4&2\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}-1&2\\2&1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}2&-1\\1&-4\end{vmatrix}$$

$=(-6):(-5):(-7)=6:5:7$

設 $a=6k$，$b=5k$，$c=7k$

$\therefore\quad \cos A:\cos B:\cos C$

$$=\frac{(5k)^2+(7k)^2-(6k)^2}{2(5k)(7k)}:\frac{(6k)^2+(7k)^2-(5k)^2}{2(6k)(7k)}:\frac{(6k)^2+(5k)^2-(7k)^2}{2(6k)(5k)}$$

$$=\frac{38}{5\times7}:\frac{60}{6\times7}:\frac{12}{6\times5}$$

$=19:25:7$

13. 設△ABC 中，已知 $a=14$，$b=10$，$c=6$，試求△ABC 之

(1)面積____________。　　(2)外接圓的半徑__________。

(3) $\overline{BC}$ 邊上的中線______________。　(4)最大內角的度量______________。

Ans：(1) $15\sqrt{3}$　(2) $\dfrac{14}{3}\sqrt{3}$　(3) $\sqrt{19}$　(4) $\angle A=120°$

解析：

(1) $a=12$，$b=10$，$c=6$　$\Rightarrow$　$s=\dfrac{1}{2}(a+b+c)=15$

由海龍公式△$=\sqrt{15\cdot1\cdot5\cdot9}=15\sqrt{3}$

(2)由△$=\dfrac{abc}{4R}$　$\Rightarrow$　$15\sqrt{3}=\dfrac{14\cdot10\cdot6}{4R}\Rightarrow$　$R=\dfrac{60\cdot14}{60\sqrt{3}}=\dfrac{14}{\sqrt{3}}=\dfrac{14\sqrt{3}}{3}$

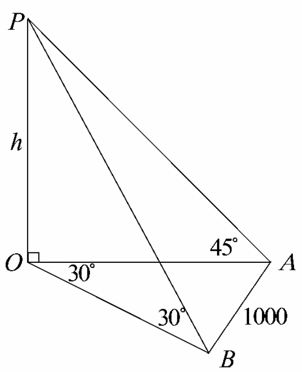
(3) $\overline{BC}$ 邊上之中線$=\dfrac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{200+72-196}=\sqrt{19}$

(4)最大邊爲a

由餘弦定理$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{100+36-196}{2\cdot10\cdot6}=-\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow$　最大角$\angle A=120°$

14. 自塔之東一點A，測得塔頂之仰角爲 45°；在塔之南 60°東一點B，測得塔頂之仰角爲 30°。設A、B兩點相距 1000 公尺，則塔高爲__________公尺。



Ans：1000 公尺

解析：

如圖：設塔高$\overline{OP}=h$公尺

於$\triangle OAP$中，$\angle OAP=45°\quad\Rightarrow\quad\overline{OA}=h$

於$\triangle OBP$中，$\angle OBP=30°\quad\Rightarrow\quad\overline{OB}=\sqrt{3}\,h$

於$\triangle OAB$中，$\angle AOB=30°$，由餘弦定理

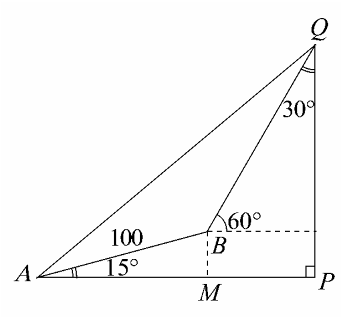
$\overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-2\,\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cdot\cos30°$

$\Rightarrow\quad 1000^2=h^2+3h^2-2\cdot h\cdot\sqrt{3}\,h\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=h^2\quad\therefore\quad h=1000$

15. 某人於山麓測得山頂的仰角爲 30°，今沿山麓循 15°斜坡上行 100 公尺，再測得山頂的仰角爲 60°，則山高爲__________公尺。

Ans：$50\sqrt{2}$

解析：



$\angle BAM=15°$

$\Rightarrow\quad\angle BAQ=15°$，$\angle ABM=75°$

$\Rightarrow\quad\angle ABQ=135°$，$\angle BQA=30°$

$\dfrac{\overline{BQ}}{\sin15°}=\dfrac{100}{\sin30°}\quad\Rightarrow\quad\overline{BQ}=50(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

$\therefore$ 山高 $=\overline{BQ}\sin60°+100\sin15°$

$=50(\sqrt{6}-\sqrt{2})\dfrac{\sqrt{3}}{2}+100\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=50\sqrt{2}$