| 高雄市明誠中學　高三(上)數學複習測驗　　日期：92.10.31 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 範圍 | Book2-Chap2<br>三角函數(1) | 班級 | 普三　　班 | 姓名 | |
| | | 座號 | | | |

## 一、選擇題 (每題 8 分)

1.(　　) 下列各值何者最小？

(A) $\cos 50°$　(B) $\cos 100°$　(C) $\cos 250°$　(D) $\cos 312°$　(E) $\cos(-112°)$。

Ans： (E)

解析： (B) $\cos 100° = \cos(180° - 80°) = -\cos 80° < 0$

(C) $\cos 250° = \cos(180° + 70°) = -\cos 70° < 0$

(D) $\cos 312° = \cos(360° - 48°) = \cos 48° > 0$

(E) $\cos(-112°) = \cos 112° = \cos(180° - 48°) = -\cos 48° < 0$

$\cos\theta$ 爲減函數 $\Rightarrow \cos 48° > \cos 50° > 0 > -\cos 80° > -\cos 70° > -\cos 48°$

2.(　　) 設 $x^2 - (\tan\theta + \cot\theta)x + 1 = 0$ 有一根爲 $2+\sqrt{3}$，（$0° < \theta < 90°$），下列何者正確？

(A) $\tan\theta + \cot\theta = 4$　(B) $\sec\theta\csc\theta = 4$　(C) $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$　(D) $\sin\theta - \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(E)另一根爲 $2-\sqrt{3}$　(複選)

Ans： (A)(B)(C)(E)

解析：另一根爲 $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$

(A) $\tan\theta + \cot\theta = (2+\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3}) = 4$

(B) $\tan\theta + \cot\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta} = 4 \Rightarrow$　$\sec\theta\cos\theta = 4$

(C) $1 + 2\sin\theta\cos\theta = \dfrac{3}{2}$　$\Rightarrow$　$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \dfrac{3}{2} \Rightarrow$　$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

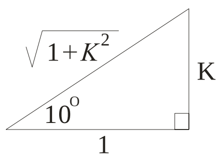
(D) $1 - 2\sin\theta\cos\theta = \dfrac{1}{2}$　$\Rightarrow$　$\sin\theta - \cos\theta = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

3.(　　) 已知 $\cot 260° = k$，下列何者正確？

(A) $\sin 260° = -\dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}}$　(B) $\cos 10° = \dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}}$　(C) $\tan 10° = k$

(D) $\sec 260° = -\dfrac{\sqrt{1+k^2}}{k}$　(E) $\csc 10° = -\dfrac{\sqrt{1+k^2}}{k}$

Ans： (A)(B)(C)(D)




解析：　$\cot 260° = k$　$\Rightarrow$　$\cot(270° - 10°) = k$　$\Rightarrow$　$\tan 10° = k$　$\Rightarrow$

$\therefore$(A)　$\sin 260° = \sin(270° - 10°) = -\cos 10°$　$= \dfrac{-1}{\sqrt{1+k^2}}$，

(B) $\cos 10° = \dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}}$　(C) $\tan 10° = k$　(D) $\sec 260° = -\csc 10°$　$= \dfrac{\sqrt{1+k^2}}{-k}$

(E) $\csc 10° = \dfrac{\sqrt{1+k^2}}{k}$

二、填充題：(每題 10 分)

1. $\theta$為銳角，$x$是實數，已知$\sec\theta=\dfrac{2x^2+7x+5}{2x+3}$，$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{65}}{9}$，則$x=$__________。

Ans： $\dfrac{1}{2}$或$-\dfrac{7}{4}$

解析： 由$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{65}}{9}$ $\Rightarrow$ $\cos\theta=\dfrac{4}{9}$ $\Rightarrow$ $\sec\theta=\dfrac{9}{4}$

$\sec\theta=\dfrac{2x^2+7x+5}{2x+3}=\dfrac{9}{4}\Rightarrow$ $8x^2+28x+20=18x+27\Rightarrow$ $x=\dfrac{1}{2}$或$-\dfrac{7}{4}$

2. $\dfrac{2\log\tan 60^\circ+\log\tan 45^\circ-3\log\sin 30^\circ+\log 5}{1+\frac{1}{2}\log 36+2\log\sec 45^\circ-2\log\cot 45^\circ}$之值為 __________。

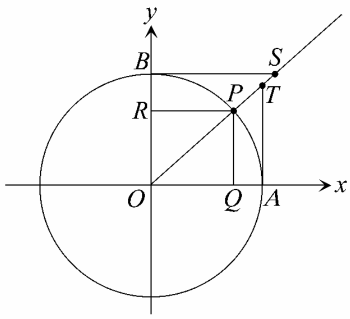
Ans： 1

解析：原式 $=\dfrac{2\log\sqrt{3}+\log 1-3\log\frac{1}{2}+\log 5}{1+\log 6+\log(\sqrt{2})^2-2\log 1}=\dfrac{\log 3+\log 8+\log 5}{\log 10+\log 6+\log 2}=\dfrac{\log(3\cdot 8\cdot 5)}{\log(10\cdot 6\cdot 2)}$

$=\dfrac{\log 120}{\log 120}=1$

3. 如圖，$\overline{PQ}$，$\overline{TA}$都垂直$x$軸，$\overline{PR}$，$\overline{SB}$都垂直$y$軸，$A$，$T$，$B$在圓上，已知$\overline{AT}=\dfrac{3}{5}$，$\overline{OP}=1$，則$\overline{OQ}$ · $\overline{OS}$ $+\overline{BS}$之值為

。



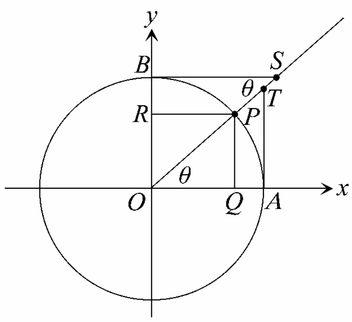

Ans： $\dfrac{10}{3}$

解析：(1)令$\theta=\angle TOA=\angle OSB\Rightarrow$ $\tan\theta=\dfrac{\overline{AT}}{\overline{OA}}=\dfrac{3}{5}$

$\Rightarrow$ $\sin\theta=\dfrac{3}{\sqrt{34}}$，$\cos\theta=\dfrac{5}{\sqrt{34}}$，$\cot\theta=\dfrac{5}{3}$

$\sec\theta=\dfrac{\sqrt{34}}{5}$，$\csc\theta=\dfrac{\sqrt{34}}{3}$

(2) $\sin\theta=\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{OP}}=\overline{PQ}=\dfrac{3}{\sqrt{34}}=\dfrac{\overline{OB}}{\overline{OS}}=\dfrac{1}{\overline{OS}}\Rightarrow$ $\overline{OS}=\dfrac{\sqrt{34}}{3}$




$\cos\theta=\dfrac{\overline{OQ}}{\overline{OP}}=\overline{OQ}=\dfrac{5}{\sqrt{34}}$

$\sec\theta=\dfrac{\overline{OS}}{\overline{BS}}$ $\Rightarrow$ $\overline{BS}=\overline{OS}\cos\theta=\dfrac{\sqrt{34}}{3}\cdot\dfrac{5}{\sqrt{34}}=\dfrac{5}{3}$

(3)$\therefore$ $\overline{OQ}\cdot\overline{OS}+\overline{BS}=\dfrac{5}{\sqrt{34}}\cdot\dfrac{\sqrt{34}}{3}+\dfrac{5}{3}=\dfrac{10}{3}$

4. 設$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\le\cos\theta\le\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，求銳角$\theta$的範圍________________。

Ans：$30° \le \theta \le 75°$

解析：$\cos 75° = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，$\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \le \cos\theta \le \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos 75° \le \cos\theta \le \cos 30° \qquad \therefore \quad 75° \ge \theta \ge 30°$$

5. $\theta$是一個銳角，(1)滿足$\dfrac{2\sin\theta + 3\cos\theta}{3\sin\theta - 2\cos\theta} = 3$，求$\tan\theta =$ ____________。

(2)滿足 $6\sin^2\theta - 5\sin\theta\cos\theta - 4\cos^2\theta = 0$，求$\tan\theta =$ _______________。

Ans： (1)$\dfrac{9}{7}$ (2)$\dfrac{4}{3}$

解析：(1)由$\dfrac{2\sin\theta + 3\cos\theta}{3\sin\theta - 2\cos\theta} = 3 \Rightarrow \quad 2\sin\theta + 3\cos\theta = 9\sin\theta - 6\cos\theta$

$$\therefore \quad 9\cos\theta = 7\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{9}{7} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \Rightarrow \quad \tan\theta = \frac{9}{7}$$

(2) $6\sin^2\theta - 5\sin\theta\cos\theta - 4\cos^2\theta = 0$

$$\Rightarrow \quad 6\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} - 5\frac{\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta} - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 6\tan^2\theta - 5\tan\theta - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (2\tan\theta + 1)(3\tan\theta - 4) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \tan\theta = \frac{4}{3}$$

6. 設$\theta$為銳角，若$\sin\theta$與$\cos\theta$為方程式 $3x^2 - 4x + k = 0$ 兩根，並且$\tan\theta$與$\cot\theta$也為方程式$x^2 + px + q = 0$ 兩根，則常數$k =$__________，而數對$(p，q) =$__________。

Ans： $\dfrac{7}{6}$，$(-\dfrac{18}{7}，1)$

解析： 因為$\sin\theta$與$\cos\theta$為方程式 $3x^2 - 4x + k = 0$ 兩根

由根與係數關係知：$\begin{cases} \sin\theta + \cos\theta = \dfrac{4}{3} \cdots\cdots ① \\ \sin\theta \cdot \cos\theta = \dfrac{k}{3} \cdots\cdots ② \end{cases}$

將①平方，得 $\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \dfrac{16}{9} \quad \Leftrightarrow \quad \sin\theta\cos\theta = \dfrac{7}{18}$

由②可得 $k = 3\sin\theta\cos\theta = 3 \cdot \dfrac{7}{18} = \dfrac{7}{6}$

其次，又因為$\tan\theta$與$\cot\theta$也為方程式$x^2 + px + q = 0$ 兩根

同理知$\begin{cases} \tan\theta + \cot\theta = -p \ \cdots\cdots ③ \\ \tan\theta \cdot \cot\theta = q \cdots\cdots ④ \end{cases}$

由③可得 $p = -(\tan\theta + \cot\theta) = -(\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}) = -\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta} = -\dfrac{18}{7}$

再由④可得$q = \tan\theta \cdot \cot\theta = 1$ 故數對$(p，q) = (-\dfrac{18}{7}，1)$

7. 已知 $0° \le \theta \le 45°$且$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{3}\sqrt{17}$，則

(1) $\tan\theta+\cot\theta=$__________。

(2) $\sin\theta-\cos\theta=$__________。

Ans： (1)$\dfrac{9}{4}$　(2)$-\dfrac{1}{3}$

解析： (1) $(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta \Rightarrow (\dfrac{1}{3}\sqrt{17})^2=1+2\sin\theta\cos\theta$

$$\Rightarrow \sin\theta\cos\theta=\frac{4}{9}$$

$$\tan\theta+\cot\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{\frac{4}{9}}=\frac{9}{4}$$

(2) $(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1-2\times\dfrac{4}{9}=\dfrac{1}{9}$

$$\therefore \sin\theta-\cos\theta=\pm\frac{1}{3}$$

又 $0°\le\theta\le45°$　$\therefore$　$\sin\theta<\cos\theta$　$\Rightarrow$　$\sin\theta-\cos\theta=-\dfrac{1}{3}$

8. 張老師從旗桿底$O$點的正西方$A$點測得桿頂$T$點的仰角爲 30°，他向旗桿前進 30 公尺至$B$點，再測得桿頂的仰角爲 60°，則：

(1)旗桿高爲(A) $15(\sqrt{3}-1)$　(B) $15\sqrt{3}$　(C) $\dfrac{20}{\sqrt{3}}$　(D) $15\sqrt{2}$　(E) 15　公尺。

(2) $B$點與桿頂$T$的距離爲(A) 30　(B) $\dfrac{40}{3}$　(C) 10　(D) 22.5　(E) $30\sqrt{3}$　公尺。

(3)他由$B$點回頭向$A$點走到$C$點，測得桿頂仰角爲 45°，則$\overline{BC}$的長爲

(A) $15(3-\sqrt{5})$　(B) 15　(C) $15\sqrt{2}$　(D) $15\sqrt{3}$　(E) $15(\sqrt{3}-1)$　公尺。

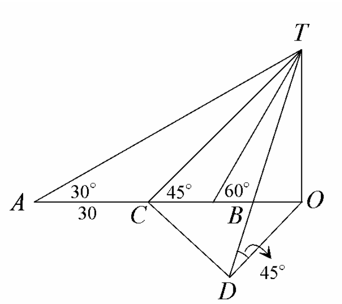
(4)若他由$B$點向正南方走到$D$點，測得桿頂仰角爲 45°，則$\overline{BD}$的長爲

(A) $15\sqrt{2}$　(B) $15\sqrt{3}$　(C) 15　(D) $15(3-\sqrt{3})$　(E) $15(\sqrt{3}-1)$　公尺。

(5) $\tan\angle AOD$的值爲(A)$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(B)$\sqrt{3}$　(C)$\sqrt{2}$　(D)$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　(E)$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　公尺。

Ans： (1)(B)　(2)(A)　(3)(E)　(4)(A)　(5)(C)

解析：




(1)如圖：$\angle BAT+\angle BTA=\angle TBO$　$\Leftrightarrow$　$30°+\angle BTA=60°$

$\Rightarrow$　$\angle BTA=30°$，所以$\overline{BT}=\overline{BA}=30$ 公尺

在$\triangle BOT$中，由正弦定義知 $\overline{OT}=\overline{BT}\sin60°=30\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=15\sqrt{3}$公尺

(2) $B$點與桿頂$T$的距離為 $\overline{BT}=\overline{OT}\csc 60°=15\sqrt{3}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{3}}=30$ 公尺

(3)在△$COT$中，$\angle OCT=45°$，故$\overline{BC}$的長為$\overline{BC}=\overline{OC}-\overline{BO}=\overline{OT}-\overline{BO}=15\sqrt{3}-15\sqrt{3}\cot 60°$

$$=15\sqrt{3}-15\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=15(\sqrt{3}-1)$$

公尺

(4)在△$DOT$中，$\angle TDO=45°$ $\therefore$ $\overline{OD}=\overline{OT}=15\sqrt{3}$

又因為在△$BDO$中，因為$\angle DBO=90°$，因此

$$\overline{BD}=\sqrt{\overline{OD}^2-\overline{BO}^2}=\sqrt{(15\sqrt{3})^2-(15\sqrt{3}\cot 60°)^2}=\sqrt{(15\sqrt{3})^2-(15)^2}=15\sqrt{2}$$

(5)在△$BDO$中，因為$\angle DBO=90°$，所以$\tan\angle AOD=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{BO}}=\dfrac{15\sqrt{2}}{15\sqrt{3}\cot 60°}=\sqrt{2}$

9. 山上有一塔，塔頂有一旗竿，已知旗竿長 10 公尺，今於地面上某點測得山頂、塔頂、旗竿頂的仰角分別為30°，45°，60°，求山高 =__________公尺。

Ans： $\dfrac{15\sqrt{2}}{2}$公尺；$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}-1$

解析：如圖所示，設$\overline{CH}=h$，$\overline{AC}=h\cot 75°=(2-\sqrt{3})h$

而$\overline{BC}=h\cot 30°=\sqrt{3}h$。因為$\angle CAB=90°$

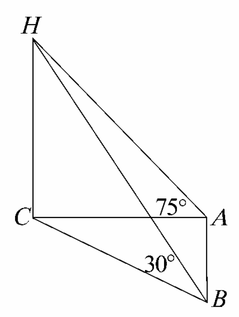
故由畢氏定理可得$\overline{AC}^2+\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$，亦即

$$[(2-\sqrt{3})h]^2+\left(\frac{2}{\sqrt{\sqrt{3}+1}}\right)^2=(\sqrt{3}h)^2$$

解之，得$h=\dfrac{15\sqrt{2}}{2}$公尺，亦即塔高$\overline{CH}=\dfrac{15\sqrt{2}}{2}$公尺

其次，$\cos\angle ACB=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\dfrac{(2-\sqrt{3})h}{\sqrt{3}h}=\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}-1$

故得$\cos\angle ACB=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}-1$




10. 地面上共線的三點$A$，$B$，$C$測得一塔頂的仰角各為 30°，45°，60°，已知$A$，$B$，$C$與塔底不共線，且$\overline{AB}=\overline{BC}=600$(公尺)，則塔高為__________公尺。

Ans： $300\sqrt{6}$

解析：

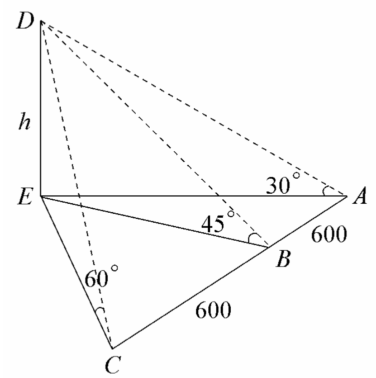
設塔為$h$ $\therefore$ $\overline{AE}=\sqrt{3}h$，$\overline{BE}=h$，$\overline{CE}=\dfrac{h}{\sqrt{3}}$

在△$ACE$中，利用三角形中線定理

$\therefore$ $\overline{AE}^2+\overline{CE}^2=2(\overline{BE}^2+\overline{AB}^2)$

$\therefore$ $(\sqrt{3}h)^2+\left(\dfrac{h}{\sqrt{3}}\right)^2=2(h^2+600^2)$

$\therefore$ $h=300\sqrt{6}$




11. $\sin 120°\cos 150°-\cos 405°\sin(-225°)+\tan 2100°\sec 180°=$ __________。

Ans： $-\frac{1}{4}+\sqrt{3}$

解析： $\cos 405° = \cos(360° + 45°) = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan 2100° = \tan(360° \times 6 - 60°) = -\tan 60° = -\sqrt{3}$

$\therefore$ 原式 $= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2} + (-\sqrt{3})(-1) \qquad = -\frac{1}{4}+\sqrt{3}$

12. 設 $90° < \theta < 180°$，$\cos\theta = -0.4152$，$\cos 65°20' = 0.4173$，$\cos 65°30' = 0.4147$，則$\theta =$ ____ 。

Ans：.114°32′

解析：

$\cos 65°20' = 0.4173$

$\cos\alpha = 0.4152$

$\cos 65°30' = 0.4147$

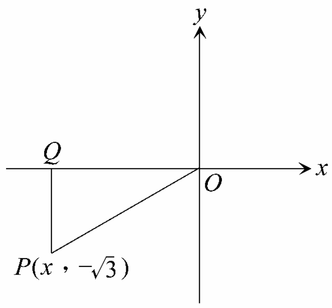
$\Rightarrow \quad \frac{10}{a} = \frac{26}{21} \quad \Rightarrow \quad a \doteqdot 8 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 65°28'$

又 $90° < \theta < 180°$，$\cos\theta = -\cos\alpha \Rightarrow \quad \theta = 180° - \alpha = 180° - 65°28' = 114°32'$

13. 設$P(x，-\sqrt{3})$在標準位置角$\theta$的終邊上，且$\cot\theta = \sqrt{3}$ ，則$x =$ ____________ ，又$\cos\theta =$ __ 。

Ans：$-3$；$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

解析：




如上圖，根據廣義三角定義，得 $\cot\theta = \frac{x}{-\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \quad x = -3$

而 $\cos\theta = \frac{x}{\overline{OP}} = \frac{-3}{\sqrt{(-3)^2 + (-\sqrt{3})^2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

14. 設$f(x) = \sqrt{3}\sin x - \cos x + 6$，$0 < x \leq 2\pi$，則$y = f(x)$圖形上的最低點坐標爲__________ 。

Ans： $(\frac{5\pi}{3}，4)$

解析：

$f(x) = \sqrt{3}\sin x - \cos x + 6 = 2(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x) + 6 = 2\sin(x - 30°) + 6$

當 $x - 30° = 270° \quad \Rightarrow \quad x = 300° = \frac{5\pi}{3}$時，$f(x) = 4$ 爲最小值

$\therefore \quad y = f(x)$圖形上的最低點坐標爲$(\frac{5\pi}{3}，4)$

15. 設 $0 \le x \le \pi$，若函數$f(x) = 4\sin x - 2\sqrt{3}\sin(x - \frac{\pi}{6})$在$x = x_1$時有最大值$M$；在$x = x_2$時有最小值爲$m$，則數對$(x_1，M)$ = __________ ，$(x_2，m)$ = __________ 。

Ans：$(\frac{\pi}{6}，2)$；$(\pi，-\sqrt{3})$

解析：

$f(x) = 4\sin x - 2\sqrt{3}\sin(x - \frac{\pi}{6})$

$= 4\sin x - 2\sqrt{3}(\sin x\cos\frac{\pi}{6} - \cos x\sin\frac{\pi}{6})$

$= 4\sin x - 2\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x)$

$= \sin x + \sqrt{3}\cos x = 2(\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x)$

$= 2\sin(x + \frac{\pi}{3})$

因爲 $0 \le x \le \pi$，所以$\frac{\pi}{3} \le x + \frac{\pi}{3} \le \frac{4\pi}{3}$ 。因此

①當 $x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ ，即 $x = \frac{\pi}{6}$時，$f(x)$最大值 $M = 2$

②當 $x + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$ ，即 $x = \pi$ 時，$f(x)$最小值 $m = -\sqrt{3}$

16. $\sin(\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3})$ = __________ 。

Ans： $\frac{\sqrt{2}}{2}$

解析： 令$\alpha = \tan^{-1}\frac{1}{2}$ ，$\beta = \tan^{-1}\frac{1}{3}$

$\Rightarrow \quad \tan\alpha = \frac{1}{2}$ ，$\tan\beta = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

$= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$

$\therefore \quad \sin(\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3}) = \sin(\alpha + \beta) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

17. $\sin(\sin^{-1}\frac{1}{2} + \cos^{-1}(-\frac{\sqrt{3}}{2}))$ =__________ 。

Ans： 0

解析：$\sin(\sin^{-1}\frac{1}{2} + \cos^{-1}(-\frac{\sqrt{3}}{2})) = \sin(30° + 150°) = \sin 180° = 0$

18. 若$x^5 = 1$ 有 5 個根，1，$\omega$，$\omega^2$，$\omega^3$，$\omega^4$，且$\omega = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$ ，則下列各敘述何者爲

正確？

(A) $\omega^{90}=1$　(B) $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4=0$　(C) $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^3)(1-\omega^4)=5$

(D) $\frac{1}{1-\omega}+\frac{1}{1-\omega^2}+\frac{1}{1-\omega^3}+\frac{1}{1-\omega^4}=2$　(E) $1+2\omega+3\omega^2+4\omega^3+\cdots+100\omega^{99}=0$

Ans： (A)(B)(C)(D)

解析：

因為 1，$\omega$，$\omega^2$，$\omega^3$，$\omega^4$為$x^5-1=0$ 的 5 個根

故可知：$1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4=0$，而$\omega^5=1$

(A) $\omega^{90}=(\omega^5)^{18}=1^{18}=1$

(B) $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4=0$

(C)因為 1，$\omega$，$\omega^2$，$\omega^3$，$\omega^4$為$x^5-1=0$ 的 5 個根

故得$x^5-1=(x-1)(x-\omega)(x-\omega^2)(x-\omega^3)(x-\omega^4)=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$

上式兩邊約去$x-1$

得$(x-\omega)(x-\omega^2)(x-\omega^3)(x-\omega^4)=x^4+x^3+x^2+x+1$

將$x=1$ 代入得$(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^3)(1-\omega^4)=5$

(D) $\frac{1}{1-\omega}+\frac{1}{1-\omega^2}+\frac{1}{1-\omega^3}+\frac{1}{1-\omega^4}$

$=(\frac{1}{1-\omega}+\frac{1}{1-\omega^4})+(\frac{1}{1-\omega^2}+\frac{1}{1-\omega^3})$

$=\frac{1-\omega^4+1-\omega}{1-\omega-\omega^4+\omega^5}+\frac{1-\omega^3+1-\omega^2}{1-\omega^2-\omega^3+\omega^5}$

$=\frac{2-\omega-\omega^4}{2-\omega-\omega^4}+\frac{2-\omega^2-\omega^3}{2-\omega^2-\omega^3}$

$=1+1=2$

(E)　$P=1+2+3\omega^2+4\omega^3+\cdots+100\omega^{99}$

$$\begin{array}{l} -)\omega P=\omega+2\omega^2+3\omega^3+\cdots+99\omega^{99}+100\omega^{100} \\ \hline (1-\omega)P=1+\omega+\omega^2+\omega^3+\cdots+\omega^{99}-100\omega^{100} \end{array}$$

$=\frac{1\cdot(1-\omega^{100})}{1-\omega}-100\omega^{100}$

$=-100$

$\therefore$　$P=\frac{-100}{1-\omega}=\frac{100}{\omega-1}$

故應選(A)(B)(C)(D)

19. 設$z=\frac{\sqrt{3}-i}{1+\sqrt{3}i}$，則

(1) $z$之極式為__________。　(2) $z^{100}=$ __________。

Ans： (1) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos 105^\circ+i\sin 105^\circ)$　(2) $\frac{\sqrt{3}}{64}-\frac{1}{64}i$

解析：(1)$|z|=|\frac{1+i}{1-\sqrt{3}i}|=\frac{|1+i|}{|1-\sqrt{3}i|}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \quad z=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{1-\sqrt{3}i}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)(1+\sqrt{3}i)}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)}\right]$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}i+\sqrt{2}i-\sqrt{6}}{1+3}\right)$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)+\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)i\right]$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}[\cos(180°-75°)+i\sin(180°-75°)]=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos105°+i\sin105°)$

(2) $z^{10}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{10}(\cos105°+i\sin105°)^{10}=\frac{1}{2^5}(\cos1050°+i\sin1050°)$

$=\frac{1}{32}[\cos(90°\times 11+60°)+i\sin(90°\times 11+60°)]$

$=\frac{1}{32}(\sin 60°-i\cos 60°)=\frac{1}{32}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=\frac{\sqrt{3}}{64}-\frac{1}{64}i$

20. $\frac{(\sin 78°+i\cos 78°)^6(\sin 87°-i\cos 87°)^4}{(\sin 50°+i\sin 40°)^3}=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿。

Ans： $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

解析： 原式 $=\frac{(\cos12°+i\sin12°)^6(\cos3°-i\sin3°)^4}{(\cos40°+i\sin40°)^3}$

$=\frac{(\cos72°+i\sin72°)(\cos(-12°)+i\sin(-12°))}{\cos120°+i\sin120°}$

$=\cos(72°-12°-120°)+i\sin(72°-12°-120°)$

$=\cos(-60°)+i\sin(-60°)$

$=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

21. (1)試求 $3+4i$的兩個平方根＿＿＿＿＿＿＿＿。

(2)利用(1)的結果求二次方程式$x^2+(4-3i)x+(1-7i)=0$ 的解＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

Ans： (1) $\pm(2+i)$ (2) $-1+2i$ 或 $-3+i$

解析：(1)設$a+bi$($a$，$b\in R$)爲 $3+4i$的平方根，則

$(a+bi)^2=3+4i \quad\Rightarrow\quad (a^2-b^2)+2abi=3+4i\Rightarrow \begin{cases} a^2-b^2=3\cdots\cdots① \\ 2ab=4\cdots\cdots② \end{cases}$

又 $|(a+bi)^2|=|3+4i|\Rightarrow \quad a^2+b^2=5\cdots\cdots③$

由①，③得$a^2=4$，$b^2=1$，由②$ab=2$ 知$a$與$b$同號

$\therefore$ $(a,b)=(2,1)$或$(-2,-1)$ 故 $3+4i$的兩個平方根爲$\pm(2+i)$

(2)方程式$x^2+(4-3i)x+(1-7i)=0$ 中

$D=(4-3i)^2-4(1-7i)=16-24i-9-4+28i=3+4i$

由(1)知，$D=3+4i$的兩個平方根爲$\pm(2+i)$

由公式得方程式的兩個根爲$x=\frac{-(4-3i)\pm(2+i)}{2}=-1+2i$或 $-3+i$