高雄市明誠中學 高三(上)數學複習測驗 日期：92.10.02					
範圍	Book2-Chap1 指數、對數	班級 座號	普三　　班	姓名	

一、單選題 (每題 8 分)

1.(C) $2x + 2\log_{10}(2 + 10^{-x}) - \log_{10}(\frac{1}{4} + 10^{x} + 10^{2x})$可化簡為下列何種形式：

(A) 2×10^{x}　(B) $x \cdot \log_{10}\frac{1}{4}$　(C) $2\log_{10}2$　(D) 1　(E) $2x + 10^{2x}$

解析：

$2x + 2\log_{10}(2 + 10^{-x}) - \log_{10}(\frac{1}{4} + 10^{x} + 10^{2x})$

$= \log_{10}10^{2x} + \log_{10}(2 + 10^{-x})^{2} - \log_{10}(\frac{1}{2} + 10^{x})^{2}$

令$t = 10^{x} > 0$

原式 $= \log_{10}\dfrac{t^{2}(2+\frac{1}{t})^{2}}{(\frac{1}{2}+t)^{2}} = \log_{10}\dfrac{(2t+1)^{2}}{(\frac{1}{2}+t)^{2}} = \log_{10}\dfrac{4(t+\frac{1}{2})^{2}}{(\frac{1}{2}+t)^{2}} = \log_{10}4 = 2\log_{10}2$

2.(B) 設$a = 2^{26}$，$b = 3^{16}$，且已知$\log_{10}a = 7.8260$，$\log_{10}b = 7.6336$，試問下列何者正確？

(A) a為 7 位數　(B) b為 8 位數　(C) ab為 14 位數

(D) ab為 15 位數　(E) ab為 49 位數

解析：

$\log_{10}a = 7.8260$，$\log_{10}b = 7.6336$　$\Rightarrow$　a，b皆為 8 位數

$\log_{10}ab = \log_{10}a + \log_{10}b = 7.8260 + 7.6336 = 15.4596 \Rightarrow$　ab為 16 位數

二、填充題：(每題 10 分)

1. $y = 3^{x}$之圖形與直線$y = 4$，$y = 12$ 之交點分別為A，B，則$\overleftrightarrow{AB}$之斜率為__________。

答案： 8

解析：

$A：\begin{cases} y = 3^{x} \\ y = 4 \end{cases}$　$\Rightarrow$　$A(\log_{3}4，4)$，　$B：\begin{cases} y = 3^{x} \\ y = 12 \end{cases}$　$\Rightarrow$　$B(\log_{3}12，12)$

$\therefore$　$m_{\overline{AB}} = \dfrac{12-4}{\log_{3}12 - \log_{3}4} = \dfrac{8}{\log_{3}3} = 8$

2. 阿生將 10 萬元存入銀行，以年利率 6%，每年複利計息一次，則至少需要__________年，方使利息部分超過 15 萬元。

答案： 16

解析：

n年後本利和 $= 100000(1 + 0.06)^{n} > 100000 + 150000$

$\Rightarrow$　$(1.06)^{n} > \dfrac{25}{10} \Rightarrow$　$\log(1.06)^{n} > \log25 - \log10$

$\Rightarrow$　$n \times (0.0253) > \log100 - \log4 - 1 = 0.398$

$$\Rightarrow \quad n > \frac{0.398}{0.0253} \doteqdot 15.7 \qquad \therefore \quad n \geq 16$$

3. 若$\log_2 3 = a$，$\log_3 5 = b$，$\log_5 7 = c$，則以a，b，c表示$\log_{42}105 =$ ＿＿＿＿＿＿＿。

答案： $\dfrac{a+ab+abc}{1+a+abc}$

解析：

$$\log_3 5 = b \quad \Rightarrow \quad \log_5 3 = \frac{1}{b}$$

$$\log_2 5 = \log_2 3 \cdot \log_3 5 = ab \quad \Rightarrow \quad \log_5 2 = \frac{1}{ab}$$

$\therefore \quad \log_{42}105$

$$= \frac{\log_5(3\times5\times7)}{\log_5(2\times3\times7)} = \frac{\log_5 3 + 1 + \log_5 7}{\log_5 2 + \log_5 3 + \log_5 7} = \frac{\frac{1}{b}+1+c}{\frac{1}{ab}+\frac{1}{b}+c} = \frac{\frac{1+b+bc}{b}}{\frac{1+a+abc}{ab}} = \frac{a+ab+abc}{1+a+abc}$$

4. 方程式 $2^x + 8 \cdot 2^{-x} = 6$ 之解爲＿＿＿＿＿＿＿。

答案： $x = 1$ 或 $x = 2$

解析：令

$$t = 2^x, 2^{-x} = \frac{1}{t} \Rightarrow t + \frac{8}{t} = 6 \Rightarrow t^2 - 6t + 8 = 0$$

$$\Rightarrow (t-2)(t-4) = 0 \Rightarrow t = 2, 4 \Rightarrow 2^x = 2, 4$$

$$\Rightarrow x = 1, 2$$

5. 設$a^{2x} = 3 - 2\sqrt{2}$ ，則

(1) $a^{-x} =$＿＿＿＿＿＿＿。(2) $\dfrac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}} =$＿＿＿＿＿＿＿。

答案： (1) $\sqrt{2}+1$ (2) 7

解析：

(1) $(a^x)^2 = 3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2}-1)^2 \ \Rightarrow a^x = \sqrt{2}-1, \therefore a^{-x} = \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$

(2) $\dfrac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}} = \dfrac{(a^x+a^{-x})(a^{2x}-a^x\cdot a^{-x}+a^{-2x})}{a^x+a^{-x}} = a^{2x} - a^x \cdot a^{-x} + a^{-2x}$

$$= a^{2x} - 1 + a^{-2x} = (3-2\sqrt{2}) - 1 + \frac{1}{3-2\sqrt{2}} = 3 - 2\sqrt{2} - 1 + 3 + 2\sqrt{2} = 5$$

6. 指數不等式$(0.125)^x < 0.25 < 2^{-2x}$的解爲＿＿＿＿＿＿＿。

答案：$\dfrac{2}{3} < x < 1$

解析：

$$(0.125)^x < 0.25 < 2^{-2x} \Rightarrow \quad (\frac{1}{8})^x < \frac{1}{4} < 2^{-2x} \Rightarrow \quad 2^{-3x} < 2^{-2} < 2^{-2x}$$

$$\Rightarrow \quad -3x < -2 < -2x \Rightarrow \quad 1 > x > \frac{2}{3}$$

7. 若$(\dfrac{1}{2})^x > 4$，$\log_3(x+4) < 1$，則實數x的範圍爲＿＿＿＿＿＿＿。

答案： $-4<x<-2$

解析：

(1) $(\frac{1}{2})^x > 4 = 2^2 = (\frac{1}{2})^{-2} \quad \Rightarrow \quad x < -2$

(2) $\log_3(x+4) < 1 = \log_3 3 \quad \Rightarrow \quad x+4>0$ 且 $x+4<3 \Rightarrow \quad x > -4$ 且 $x < -1$

(3)由(1)(2)交集得 $-4<x<-2$

8. 解方程式 $\log_6 x + \log_6(x-1) = 1$，得 $x =$ ＿＿＿＿＿＿。

答案： 3

解析：

$$\log_6 x + \log_6(x-1) = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x > 0 \\ x-1>0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x > 1$$

$\log_6[x(x-1)] = \log_6 6 \quad \Rightarrow \quad x^2 - x = 6 \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 6 = 0$

$\Rightarrow \quad (x-3)(x+2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3$ 或 -2（不合）

9. 設 $\log 2 = 0.3010$，$S = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{29}$，則

(1) S爲＿＿＿＿＿＿位數。 (2) S的最高位數字爲＿＿＿＿＿＿。

答案： (1) 10 (2) 1

解析：

(1) $S = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{29} = \dfrac{1\cdot(1-2^{30})}{1-2} = 2^{30} - 1$，又 $2^{30}-1$ 位數與 2^{30} 位數相同

$\log 2^{30} = 30\log 2 = 30 \times 0.3010 = 9.030 \Rightarrow$ S爲 10 位數

(2) $\log S = 9.030 = 9 + 0.030 \Rightarrow$ 尾數 $\log 1 = 0 < 0.030 < 0.3010 = \log 2$

S的最高位數字爲 1

10. 已知

x	5.45	1.07	7.58	9.16	9.17
$\log x$	0.7364	0.0294	0.8797	0.9619	0.9624

若 $a = \sqrt[3]{\dfrac{(5.45)(10.7)}{75.8}}$，$a$之近似値至有效數字第四位爲＿＿＿＿＿＿。（用內插法）

答案： 0.9162

解析：

$$\log a = \frac{1}{3}\log\frac{(5.45)(10.7)}{75.8} = \frac{1}{3}\log\frac{(5.45)(1.07)}{7.58}$$

$$= \frac{1}{3}(\log 5.45 + \log 1.07 - \log 7.58) = \frac{1}{3}(0.7364 + 0.0294 - 0.8797)$$

$$= \frac{1}{3}(-0.1139) \fallingdotseq -0.0380 = -1 + 0.9620$$

0.9619 0.9620 0.9624

9.16 x 9.17

$$\Rightarrow \frac{9.17 - x}{9.17 - 9.16} = \frac{0.9624 - 0.9620}{0.9624 - 0.9619} \quad \Rightarrow \quad x = 9.162$$

$\therefore \quad a = 9.162 \times 10^{-1} = 0.9162$

11. 設α，β 爲$(\log 3x)(\log 4x) = 1$ 的兩根，則α，β之積爲__________。

答案：$\frac{1}{12}$

解析：

$\because$ $(\log 3x)(\log 4x) = 1$ 的二根爲α，β

$\Rightarrow$ $(\log x + \log 3)(\log x + \log 4) - 1 = 0$ 的二根爲α，β

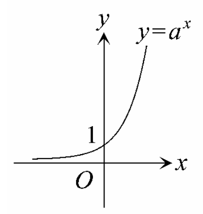
$\Rightarrow$ $(\log x)^2 + (\log 3 + \log 4)(\log x) + (\log 3)(\log 4) - 1 = 0$ 的二根爲α，β

$\Rightarrow$ $y^2 + (\log 12)y + (\log 3)(\log 4) - 1 = 0$ 的二根爲$\log\alpha$，$\log\beta$

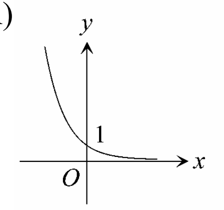
其二根和$\log\alpha + \log\beta = -\log 12$

$\Rightarrow$ $\log\alpha\beta = \log\frac{1}{12}$ $\Rightarrow$ $\alpha\beta = \frac{1}{12}$

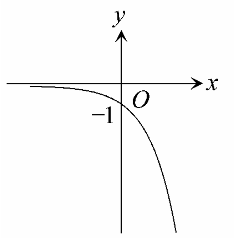
12.(D) 已知$y = a^x$的圖形如下圖，利用它可得$y = (\frac{1}{a})^{|x|}$之圖形爲



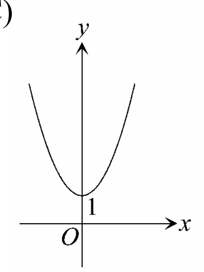
(A)



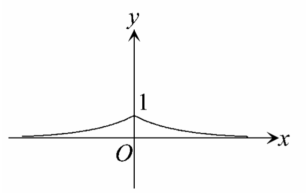
(B)



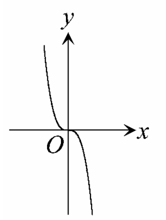
(C)



(D)



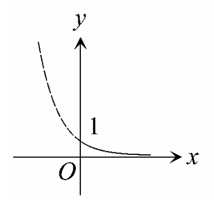
(E)



解析：

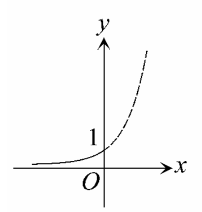
$\because$ $y = a^x$圖形爲遞增的 $\therefore$ $a > 1$ $\Rightarrow$ $0 < \frac{1}{a} < 1$

(i)$x \geq 0$ 時，$y = (\frac{1}{a})^{|x|} = (\frac{1}{a})^x$，其圖形如右上圖(一)



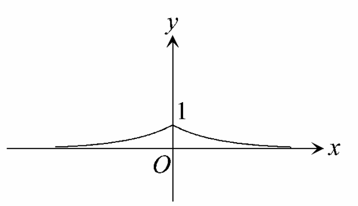
圖(一)

或(ii)$x < 0$ 時，$y = (\frac{1}{a})^{|x|} = (\frac{1}{a})^{-x} = a^x$，其圖形如右下圖(二)



圖(二)

$\therefore$ $y = (\frac{1}{a})^{|x|}$ 圖形如左圖(三)



圖(三)

13. 假設某項實驗中，細菌數 1 日後增加 1 倍，若 10 日後細菌數為N，則 k日後細菌數為$\dfrac{N}{8}$，則$k=$__________。

答案：6

解析：

$9\cdots\cdots\cdots N$

$8\cdots\cdots\cdots \dfrac{N}{2}$

$7\cdots\cdots\cdots \dfrac{N}{4}$

$6\cdots\cdots\cdots \dfrac{N}{8}$

14. 若$a>0$ 且$a^{2x}=3$，則$\dfrac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^{x}+a^{-x}}$之值 $=$__________。

答案：$\dfrac{7}{3}$

解析：原式 $=\dfrac{(a^{x})^{3}+(a^{-x})^{3}}{a^{x}+a^{-x}}=\dfrac{(a^{x}+a^{-x})[(a^{x})^{2}-a^{x}\cdot a^{-x}+(a^{-x})^{2}]}{a^{x}+a^{-x}}$

$=(a^{x})^{2}-a^{x}\cdot a^{-x}+(a^{-x})^{2}\qquad =3-1+\dfrac{1}{3}=\dfrac{7}{3}$

15. 解不等式

(1)不等式$(0.3)^{x^{2}-2x-1}<0.09$ 之解為__________。

(2)不等式 $27^{x}-4\cdot 3^{2x-1}+3^{x-1}>0$ 之解為__________。

答案： (1) $x<-1\vee x>3$　　(2) $x<-1\vee x>0$

(1) $(0.3)^{x^{2}-2x-1}<(0.3)^{2}\Rightarrow x^{2}-2x-1>2\quad (\because 0.3<1)$

$x^{2}-2x-3>0\Rightarrow (x-3)(x+1)>0\Rightarrow x<-1\vee x>3$

(2) $27^{x}-4\cdot 3^{2x-1}+3^{x-1}>0$，令$t=3^{x}$

$(3^{x})^{3}-4\cdot(3^{x})^{2}\cdot\dfrac{1}{3}+3^{x}\cdot\dfrac{1}{3}>0\Rightarrow t(3t^{2}-4t+1)>0\Rightarrow t(3t-1)(t-1)>0$

$t>0\quad\Rightarrow\quad t<\dfrac{1}{3}\vee t>1\Rightarrow 3^{x}<\dfrac{1}{3}\vee 3^{x}>1\Rightarrow x<-1\vee x>0$