高雄市明誠中學 高三(上)數學複習測驗 日期：92.09.26					
範圍	Book1、Book2 多項式、指數	班級	普三　　班	姓名	
		座號			

一、單選題 (每題 8 分)

1. (　　) 設a，b，$c \in R$且$a \neq 0$，$f(x) = ax^2 + bx + c$，$\delta = b^2 - 4ac$，若$\forall x \in R$，$f(x)$恆小於 0，則

(A) $a > 0$，$\delta > 0$　(B) $a < 0$，$\delta < 0$　(C) $a > 0$，$\delta < 0$
(D) $a < 0$，$\delta > 0$　(E)以上皆非

答案： (B)

【詳解】

$f(x) = ax^2 + bx + c < 0$，$\forall x \in R$恆成立$\Leftrightarrow$ $a < 0$ 且$b^2 - 4ac < 0$

二、填充題 (每題 10 分)

1. 已知二次函數$y = ax^2 + bx + \frac{1}{a}$在$x = -2$時有最大值 3，則實數數對$(a，b) =$__________。

答案：$(a，b) = (-1，-4)$

【詳解】

二次函數$y = f(x) = ax^2 + bx + \frac{1}{a}$在$x = -2$時有最大值 3

$\therefore$ $y = a(x+2)^2 + 3$ 且$a < 0$（有最大值 $\Rightarrow$ 開口向下 $\Rightarrow$ $a < 0$）

$\therefore$ $y = ax^2 + 4ax + 4a + 3$

比較係數，得 $4a = b$……①；$4a + 3 = \frac{1}{a}$……②

由②得 $4a^2 + 3a - 1 = 0$ $\Rightarrow$ $(a+1)(4a-1) = 0$

$\Rightarrow$ $a = -1$ 或$a = \frac{1}{4}$（不合 $\because$ $a < 0$）

代入①得$a = -1$ $\Rightarrow$ $b = -4$　所求a，b之值爲$(a，b) = (-1，-4)$

2. 設$x - 5$與$x - 7$都是$(x-6)^{50} + ax + b$的因式，其中a，b爲常數，則$a + b$之值爲__________。

答案： -1

【詳解】

令$f(x) = (x-6)^{50} + ax + b$，由因式定理

$x - 5 \mid f(x)$ $\Rightarrow$ $f(5) = 0$ $\Rightarrow$ $(5-6)^{50} + 5a + b = 0 \Rightarrow$ $5a + b = -1$……①

$x - 7 \mid f(x)$ $\Rightarrow$ $f(7) = 0$ $\Rightarrow$ $(7-6)^{50} + 7a + b = 0 \Rightarrow$ $7a + b = -1$……②

② − ①　$2a = 0$　$\therefore$　$a = 0$ 代入①，$b = -1$，故$a + b = -1$

3. 設$f(x) = x^2 - 2x - 3$，$g(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 3$，$h(x) = 2x^4 - 5x^3 - 3x^2 + x - 3$ 的最高公因式$d(x)$，最低公倍式$m(x)$，則$d(x) =$_______________，
$m(x) =$______________________________。

答案： $x - 3$；$(x-3)(x+1)(x^2 - x + 1)(2x^2 - x + 1)$

【詳解】

$f(x)=(x+1)(x-3)$

$g(x)=(x-3)(x^2-x+1)$

$h(x)=(x+1)(x-3)(2x^2-x+1)$

$\therefore\quad \text{HCF}=d(x)=x-3$

$\quad\ \ \text{LCM}=m(x)=(x-3)(x+1)(x^2-x+1)(2x^2-x+1)$

4. 設a爲整數，若$f(x)=x^3+x^2-4x+(a-7)$與$g(x)=2x^3-7x^2+7x+(2a-8)$的最高公因式爲一次式，則a的值爲__________。

答案： 3

【詳解】

已知$f(x)=x^3+x^2-4x+(a-7)$與$g(x)=2x^3-7x^2+7x+(2a-8)$之HCF爲一次式，

設爲$d(x)$，則$d(x)\mid 2f(x)-g(x) \quad\Rightarrow\quad d(x)\mid 3\,(3x^2-5x-2) \Rightarrow\quad d(x)\mid 3(x-2)(3x+1)$

$\therefore\quad d(x)=x-2$，或$d(x)=3x+1$

(1)若$d(x)=x-2$，則$x-2\mid f(x) \quad\Rightarrow\quad f(2)=0$

$\Rightarrow\quad 8+4-8+(a-7)=0 \quad\Rightarrow\quad a=3$

(2)若$d(x)=3x+1$，則 $3x+1\mid f(x) \quad\Rightarrow\quad f(\frac{-1}{3})=0$

$\Rightarrow\quad \frac{-1}{27}+\frac{1}{9}+\frac{4}{3}+a-7=0 \Rightarrow\quad a=\frac{151}{27}$ 非整數(不合)　故所求a之值爲 3

5. 多項式$f(x)$滿足 $8f(x)-5x^6f(x^3)-2f(x^2)+18=0$，則$f(x)$的常數項爲__________。

答案： -3

【詳解】

(1) $f(x)$的常數項爲$f(0)$

(2)由 $8f(x)-5x^6f(x^3)-2f(x^2)+18=0$，令$x=0$

$\therefore\quad 8f(0)-0-2f(0)+18=0 \quad\therefore\quad f(0)=-3$

5. 不等式$\frac{x^2+2x-4}{2x^2-x-2}\geq 1$之解爲__________。

答案： $\frac{1-\sqrt{17}}{4}<x\leq 1$或$\frac{1+\sqrt{17}}{4}<x\leq 2$

【詳解】

$\frac{x^2+2x-4}{2x^2-x-2}\geq 1 \quad\Rightarrow\quad \frac{x^2+2x-4}{2x^2-x-2}-1\geq 0$

$\Rightarrow\quad \frac{x^2+2x-4-2x^2+x+2}{2x^2-x-2}=\frac{-x^2+3x-2}{2x^2-x-2}\geq 0$

$\Rightarrow\quad (x^2-3x+2)(2x^2-x-2)\leq 0$ 但 $2x^2-x-2\neq 0$

$\Rightarrow\quad (x-1)(x-2)(x-\frac{1+\sqrt{17}}{4})(x-\frac{1-\sqrt{17}}{4})\leq 0$

但$x\neq\frac{1\pm\sqrt{17}}{4} \quad\Rightarrow\quad \frac{1-\sqrt{17}}{4}<x\leq 1$或$\frac{1+\sqrt{17}}{4}<x\leq 2$

6. 已知方程式$x^4-3x^3+6x^2+2x-60=0$ 有一根 $1+3i$，則其餘各根爲__________。

答案： $1-3i$，-2，3

【詳解】

方程式$x^4-3x^3+6x^2+2x-60=0$ 爲實係數方程式

已知一根爲 $1+3i$，必有一根 $1-3i$

$\therefore$ $x^4-3x^3+6x^2+2x-60$ 必可被

$[x-(1+3i)][x-(1-3i)]=x^2-2x+10$ 整除

$$\begin{array}{rrrrr|r}
1 & -3 & +6 & +2 & -60 & \\
 & 2 & -2 & -12 & & 2 \\
 & & -10 & +10 & +60 & -10 \\
\hline
1 & -1 & -6 & +0 & +0 &
\end{array}$$

$\therefore$ $x^4-3x^3+6x^2+2x-60$

$=(x^2-2x+10)(x^2-x-6)=(x^2-2x+10)(x+2)(x-3)$

故方程式有二實根 -2，3

7. 不等式$(x+1)(x-1)(4-x)^3\geq 0$ 的解爲__________。

答案： $x\leq -1$ 或 $1\leq x\leq 4$

【詳解】

$(x+1)(x-1)(4-x)^3\geq 0$

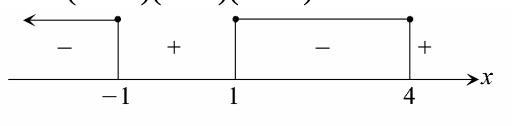
$\Leftrightarrow$ $(x+1)(x-1)[-(x-4)]^3\geq 0$

$\Leftrightarrow$ $-(x+1)(x-1)(x-4)^3\geq 0$

$\Leftrightarrow$ $(x+1)(x-1)(x-4)^3\leq 0$

$\because$ $(x-4)^2\geq 0$

$\therefore$ $(x+1)(x-1)(x-4)\leq 0$ $\Rightarrow$ $x\leq -1$ 或 $1\leq x\leq 4$



8. 設$f(x)$爲二次函數且不等式$f(x)>0$ 的解爲 $-2<x<4$，則$f(2x)<0$ 的解爲__________。

答案： $x>2$ 或 $x<-1$

【詳解】

$-2<x<4$ $\Leftrightarrow$ $(x+2)(x-4)<0$

令 $f(x)=a(x+2)(x-4)$ 且 $a<0$

$\therefore$ $f(2x)=a\,(2x+2)\,(2x-4)<0$

$=4a\,(x+1)\,(x-2)<0$

$\Leftrightarrow$ $(x+1)\,(x-2)>0$ $\Leftrightarrow$ $x>2$ 或 $x<-1$

9. 設集合$A=\{x\mid x^3-2x^2-11x+12>0\}$，$A\cup B=\{x\mid x>-3\}$，

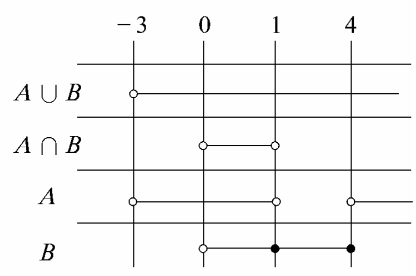
$A\cap B=\{x\mid 0<x<1\}$，則$B=$__________。

答案： $\{x \mid 0 < x \le 4\}$

【詳解】

$\because \quad x^3 - 2x^2 - 11x + 12 = (x-1)(x+3)(x-4)$

$\therefore \quad A = \{x \mid x > 4$ 或 $-3 < x < 1\}$



利用聯集與交集的定義，知$B = \{x \mid 0 < x \le 4\}$

10. 下列拋物線Γ_1：$y = \frac{1}{3}x^2 + 1$，Γ_2：$y = \frac{1}{4}x^2 - 2$，Γ_3：$y = -5x^2 + 1$，Γ_4：$y = -3x^2 + x$開口最小的是__________，開口最大的是__________。

答案： Γ_3最小；Γ_2最大

【詳解】

$y = ax^2 + bx + c$，$|a|$ 愈大，開口愈小

由於$\frac{1}{4} < \frac{1}{2} < |-3| < |-5|$，

故Γ_2的開口最大，Γ_3的開口最小

11. 設$\sqrt[x]{32} = \sqrt[y]{2^{3y-6}}$ 且$3^{15y+3x} = 81^{xy}$，求x，y的值爲__________。

答案： $x = 5$，$y = 3$

【詳解】

$$\begin{cases} \sqrt[x]{32} = \sqrt[y]{2^{3y-6}} \\ 3^{15y+3x} = 81^{xy} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2^{\frac{5}{x}} = 2^{\frac{3y-6}{y}} \\ 3^{15y+3x} = 3^{4xy} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{x} = \frac{3y-6}{y} \\ 15y + 3x = 4xy \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3xy - 6x - 5y = 0 \quad \cdots\cdots① \\ 4xy - 3x - 15y = 0 \cdots\cdots② \end{cases}$$

② $\times 2 -$ ①得$5xy - 25y = 0 \Rightarrow \quad x = 5$代入①得 $y = 3$

$\therefore \quad x = 5$，$y = 3$

12. 方程式 $2^x + 8 \cdot 2^{-x} = 6$ 之解爲__________。

答案： $x = 1$ 或 $x = 2$

【詳解】

令$t=2^x \Rightarrow t+8\cdot\frac{1}{t}=6 \Rightarrow t^2-6t+8=0 \Rightarrow (t-2)(t-4)=0$

$t=2, 4 \Rightarrow 2^x=2, 4 \quad \therefore x=1, 2$

13. 假設某項實驗中，細菌數 1 日後增加 1 倍，若 10 日後細菌數爲N，則k日後細菌數爲$\frac{N}{8}$，則$k=$__________。

答案： 7

$10\cdots\cdots\cdots N$

$9\cdots\cdots\cdots\frac{N}{2}$

$8\cdots\cdots\cdots\frac{N}{4}$

$7\cdots\cdots\cdots\frac{N}{8}$

14. 若$a>0$ 且$a^{2x}=2$，則$\frac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}$之值 $=$__________。

答案： $\frac{3}{2}$

【詳解】

原式 $=\frac{(a^x)^3+(a^{-x})^3}{a^x+a^{-x}}$

$=\frac{(a^x+a^{-x})[(a^x)^2-a^x\cdot a^{-x}+(a^{-x})^2]}{a^x+a^{-x}}$

$=(a^x)^2-a^x\cdot a^{-x}+(a^{-x})^2$

$=2-1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

15. 解不等式

(1)不等式$(0.3)^{x^2-2x-1}>0.09$ 之解爲__________。

(2)不等式 $27^x-4\cdot 3^{2x-1}+3^{x-1}<0$ 之解爲__________。

答案： (1) $-1<x<3$ (2) $-1<x<0$

(1) $(0.3)^{x^2-2x-1}>(0.3)^2 \Rightarrow x^2-2x-1<2 \quad (\because 0.3<1)$

$x^2-2x-3<0 \Rightarrow (x-3)(x+1)<0 \Rightarrow -1<x<3$

(2) $27^x-4\cdot 3^{2x-1}+3^{x-1}<0$ ，令$t=3^x$

$(3^x)^3-4\cdot(3^x)^2\cdot\frac{1}{3}+3^x\cdot\frac{1}{3}<0 \Rightarrow t(3t^2-4t+1)<0 \Rightarrow t(3t-1)(t-1)<0$

$t>0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3}<t<1 \Rightarrow \frac{1}{3}<3^x<1 \Rightarrow -1<x<0$

16. 若方程式 $4^x-3\cdot 2^{x+2}+8=0$ 之兩根爲α，β，則$\alpha+\beta=$__________。

答案： 3

【詳解】

$(2^2)^x-3\cdot 2^2\cdot 2^x+8=0 \Rightarrow \quad (2^x)^2-12\cdot 2^x+8=0$

令$t=2^x$，則$t^2-12t+8=0$ 兩根爲 2^α，2^β

由根與係數關係得 $2^{\alpha+\beta}=2^{\alpha}\cdot 2^{\beta}=8=2^{3}$

$\therefore\quad \alpha+\beta=3$

17. 若 $-1\le x\le 0$，$f(x)=2^{x+2}-3\cdot 4^{x}-1$，當$x=x_0$時，$f(x)$有最小值$y_0$，則$(x_0，y_0)=$ ______ 。

答案： (0，0)

【詳解】

令$t=2^{x}$

$\because\quad -1\le x\le 0 \quad\Rightarrow\quad 2^{-1}\le 2^{x}\le 2^{0} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}\le t\le 1$

$f(x)=4t-3t^{2}-1=-3(t-\frac{2}{3})^{2}+\frac{4}{3}-1=-3(t-\frac{2}{3})^{2}+\frac{1}{3}$

$\therefore$ 當$t=1$，即$x=0$ 時，$f(x)$有最小值$=f(0)=0$