高雄市明誠中學 高三(上)數學複習測驗 日期：92.09.18					
範圍	Book1-Chap4 多項式	班級	普三 班	姓名	
		座號			

一、單選題 (每題 8 分)

1. (　　) 估計 $2^{\frac{3}{5}}$ 最接近下列何數？(A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) $\frac{3}{2}$ (D) 2 (E) $\frac{5}{2}$

答案：(C)

【詳解】

(1) $2^{\frac{3}{5}}=\sqrt[5]{2^3}=\sqrt[5]{8}$ ∴

(2) $1.5=\sqrt[5]{(1.5)^5}=\sqrt[5]{7.59375}<\sqrt[5]{8}<\sqrt[5]{32}=2$

(3) $1.5<2^{\frac{3}{5}}<2$ 且較接近 $\frac{3}{2}=1.5$ 故選(C)

2. (　　) 設 a，b，$c\in R$ 且 $a\neq 0$，$f(x)=ax^2+bx+c$，$\delta=b^2-4ac$，若 $\forall x\in R$，$f(x)$ 恆大於 0，則

(A) $a>0$，$\delta>0$ (B) $a<0$，$\delta<0$ (C) $a>0$，$\delta<0$

(D) $a<0$，$\delta>0$ (E)以上皆非

答案： (C)

【詳解】

$f(x)=ax^2+bx+c>0$，$\forall x\in R$ 恆成立 $\Leftrightarrow$ $a>0$ 且 $b^2-4ac<0$

二、填充題 (每題 10 分)

1. 已知二次函數 $y=ax^2+bx+\frac{1}{a}$ 在 $x=-2$ 時有最大值 3，則實數數對 $(a，b)=$__________。

答案：$(a，b)=(-1，-4)$

【詳解】

二次函數 $y=f(x)=ax^2+bx+\frac{1}{a}$ 在 $x=-2$ 時有最大值 3

∴ $y=a(x+2)^2+3$ 且 $a<0$（有最大值 $\Rightarrow$ 開口向下 $\Rightarrow$ $a<0$）

∴ $y=ax^2+4ax+4a+3$

比較係數，得 $4a=b$……①；$4a+3=\frac{1}{a}$……②

由②得 $4a^2+3a-1=0$ $\Rightarrow$ $(a+1)(4a-1)=0$

$\Rightarrow$ $a=-1$ 或 $a=\frac{1}{4}$（不合 ∵ $a<0$）

代入①得 $a=-1$ $\Rightarrow$ $b=-4$ 所求 a，b 之值爲 $(a，b)=(-1，-4)$

2. 設 $\frac{2x^2-x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}$，則實數序對 $(A，B，C)=$__________。

答案： (1，−7，8)

【詳解】

利用$\dfrac{b}{a}=\dfrac{c}{a}$ $\Rightarrow$ $b=c$

$\therefore$ $\dfrac{2x^2-x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

$=\dfrac{A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

$\Rightarrow$ $A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)=2x^2-x+1$

令$x=1$，$2A=2$ $\therefore$ $A=1$

令$x=2$，$-B=7$ $\therefore$ $B=-7$

令$x=3$，$2C=16$ $\therefore$ $C=8$

3. 設$f(x)=x+2$，$g(x)=x^3-2x^2-7x+8$，若$f(h(x))=g(x)$，則$h(x)=$__________。

答案： x^3-2x^2-7x+6

【詳解】

$\because$ $f(x)=x+2$ $\therefore$ $f(h(x))=h(x)+2$

但$f(h(x))=g(x)=x^3-2x^2-7x+8=h(x)+2$

$\therefore$ $h(x)=g(x)-2=x^3-2x^2-7x+6$

4. 設$x-5$與$x-7$都是$(x-6)^{50}+ax+b$的因式，其中a，b爲常數，則$a+b$之值爲__________。

答案： -1

【詳解】

令$f(x)=(x-6)^{50}+ax+b$，由因式定理

$x-5\mid f(x)$ $\Rightarrow$ $f(5)=0$ $\Rightarrow$ $(5-6)^{50}+5a+b=0$

$\Rightarrow$ $5a+b=-1\cdots\cdots①$

$x-7\mid f(x)$ $\Rightarrow$ $f(7)=0$ $\Rightarrow$ $(7-6)^{50}+7a+b=0$

$\Rightarrow$ $7a+b=-1\cdots\cdots②$

②－① $2a=0$ $\therefore$ $a=0$ 代入①，$b=-1$，故$a+b=-1$

5. 設$f(x)=x^2-2x-3$，$g(x)=x^3-4x^2+4x-3$，$h(x)=2x^4-5x^3-3x^2+x-3$的最高公因式$d(x)$，最低公倍式$m(x)$，則$d(x)=$______________，$m(x)=$______________________________。

答案： $x-3$；$(x-3)(x+1)(x^2-x+1)(2x^2-x+1)$

【詳解】

$f(x)=(x+1)(x-3)$

$g(x)=(x-3)(x^2-x+1)$

$h(x)=(x+1)(x-3)(2x^2-x+1)$

$\therefore$ $\mathrm{HCF}=d(x)=x-3$

$\mathrm{LCM}=m(x)=(x-3)(x+1)(x^2-x+1)(2x^2-x+1)$

6. 若$f(x)=x^3+bx^2+cx+1$與$g(x)=x^3+cx^2+bx+1$有一次最高公因式，則$b+c=$______。

答案： -2

【詳解】

設$f(x)$，$g(x)$之一次最高公因式爲$d(x)$

則　$d(x) \mid f(x)-g(x)$

$\Rightarrow \quad d(x) \mid (b-c)x^2+(c-b)x$

$\Rightarrow \quad d(x) \mid (b-c)x(x-1)$

若$b=c$，則$f(x)=g(x)=x^3+bx^2+cx+1$ 不合

又$f(0)=1\neq 0 \quad \therefore \quad x \nmid f(x)$，故$d(x)=x-1$

$\therefore \quad f(1)=g(1)=0 \quad \Rightarrow \quad b+c=-2$

7. 設a爲整數，若$f(x)=x^3+x^2-4x+(a-7)$與$g(x)=2x^3-7x^2+7x+(2a-8)$的最高公因式爲一次式，則a的值爲__________。

答案： 3

【詳解】

已知$f(x)=x^3+x^2-4x+(a-7)$與$g(x)=2x^3-7x^2+7x+(2a-8)$之HCF爲一次式，設爲$d(x)$，則

$d(x) \mid 2f(x)-g(x) \quad \Rightarrow \quad d(x) \mid 3(3x^2-5x-2) \Rightarrow \quad d(x) \mid 3(x-2)(3x+1)$

$\therefore \quad d(x)=x-2$，或$d(x)=3x+1$

(1)若$d(x)=x-2$，則$x-2 \mid f(x) \quad \Rightarrow \quad f(2)=0$

$\Rightarrow \quad 8+4-8+(a-7)=0 \quad \Rightarrow \quad a=3$

(2)若$d(x)=3x+1$，則 $3x+1 \mid f(x) \quad \Rightarrow \quad f(\frac{-1}{3})=0$

$\Rightarrow \quad \frac{-1}{27}+\frac{1}{9}+\frac{4}{3}+a-7=0 \Rightarrow \quad a=\frac{151}{27}$ 非整數(不合)　故所求a之值爲 3

8. $p(x)=x^{54}-2x^2-1$，$g(x)=x^{52}-3x^2-4$，則$p(x)$與$g(x)$之最高公因式爲__________。

答案： x^2+1

【詳解】

令$x^2=t$，則$p(x)=t^{27}-2t-1=h(t)$

$g(x)=t^{26}-3t-4=k(t)$

$h(t)-tk(t)=3t^2+2t-1=(3t-1)(t+1)$

$\because \quad t+1 \mid h(t)$，$t+1 \mid k(t)$，$3t-1 \nmid h(t)$

$\therefore \quad x^2+1 \mid p(x)$，$x^2+1 \mid g(x)$

故$p(x)$與$g(x)$之最高公因式爲x^2+1

9. 多項式$f(x)$滿足 $8f(x)-5x^6f(x^3)-2f(x^2)+18=0$，則$f(x)$的常數項爲__________。

答案： -3

【詳解】

(1) $f(x)$的常數項爲$f(0)$

(2)由 $8f(x)-5x^6f(x^3)-2f(x^2)+18=0$，令$x=0$

$\therefore\quad 8f(0)-0-2f(0)+18=0\quad\therefore\quad f(0)=-3$

10. 若二次函數$y=ax^2+bx$在$x=1$時有最小值 $-\dfrac{1}{a}$，則 $3a+b$之值爲__________。

答案： 1

【詳解】

$y=ax^2+bx$在$x=1$時有最小值 $-\dfrac{1}{a}$

$\Rightarrow\quad y=a(x-1)^2-\dfrac{1}{a}$且$a>0\quad\Rightarrow\quad y=ax^2-2ax+a-\dfrac{1}{a}$

比較係數，得$b=-2a$且$a-\dfrac{1}{a}=0$

$\therefore\quad a^2=1\quad\Rightarrow\quad a=1$，$b=-2$　　故 $3a+b=3-2=1$

11. 不等式$\dfrac{x^2+2x-4}{2x^2-x-2}\geq 1$之解爲__________。

答案： $\dfrac{1-\sqrt{17}}{4}<x\leq 1$或$\dfrac{1+\sqrt{17}}{4}<x\leq 2$

【詳解】

$\dfrac{x^2+2x-4}{2x^2-x-2}\geq 1\quad\Rightarrow\quad\dfrac{x^2+2x-4}{2x^2-x-2}-1\geq 0$

$\Rightarrow\quad\dfrac{x^2+2x-4-2x^2+x+2}{2x^2-x-2}=\dfrac{-x^2+3x-2}{2x^2-x-2}\geq 0$

$\Rightarrow\quad(x^2-3x+2)(2x^2-x-2)\leq 0$ 但 $2x^2-x-2\neq 0$

$\Rightarrow\quad(x-1)(x-2)(x-\dfrac{1+\sqrt{17}}{4})(x-\dfrac{1-\sqrt{17}}{4})\leq 0$

但$x\neq\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{4}\quad\Rightarrow\quad\dfrac{1-\sqrt{17}}{4}<x\leq 1$或$\dfrac{1+\sqrt{17}}{4}<x\leq 2$

12. 已知二次函數$y=f(x)=ax^2+bx+\dfrac{1}{a}$，在$x=3$時，有最大值 8，則數對$(a, b)=$__________。

答案： $(-1, 6)$

【詳解】

$\because\quad y=f(x)$在$x=3$時，有最大值 8

$\therefore\quad y=f(x)=a(x-3)^2+8=ax^2-6ax+(9a+8)$

又已知$y=f(x)=ax^2+bx+\dfrac{1}{a}$

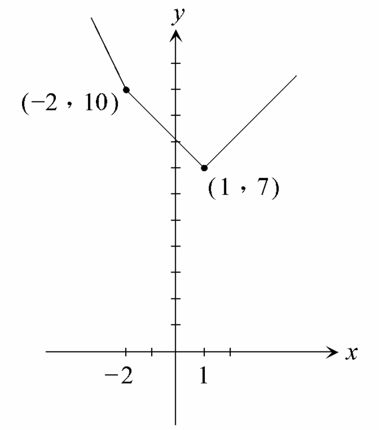
$$\therefore\quad\begin{cases}b=-6a & \cdots\cdots ①\\ \dfrac{1}{a}=9a+8 & \cdots\cdots ②\end{cases}$$

由②知 $9a^2+8a-1=0$

$\Rightarrow\quad(9a-1)(a+1)=0\quad\Rightarrow\quad a=\dfrac{1}{9}$或 -1

$\because\quad y = f(x)$有最大值　$\therefore\quad a = -1$，$b = 6$ 即$(a，b) = (-1，6)$

13. 函數$f(x) = |x-1| + |x+2| - x + 5$ 之最小值為__________。
答案： 7
【詳解】



$f(x) = |x-1| + |x+2| - x + 5$

$x = 1，-2$ 分割數線為 3 部分

① $x < -2$ 時，$f(x) = -(x-1) - (x+2) - x + 5 = -3x + 4$

② $-2 \le x \le 1$ 時，$f(x) = -(x-1) + (x+2) - x + 5 = -x + 8$

③ $x > 1$ 時，$f(x) = (x-1) + (x+2) - x + 5 = x + 6$

圖形為一折線，折點為$(-2，10)$，$(1，7)$

$\therefore\quad f(x)$的最小值為 7

14. 已知方程式$x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 2x - 60 = 0$ 有一根 $1 + 3i$，則其餘各根為__________。
答案： $1 - 3i$，-2，3
【詳解】

方程式$x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 2x - 60 = 0$ 為實係數方程式

已知一根為 $1 + 3i$，必有一根 $1 - 3i$

$\therefore\quad x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 2x - 60$ 必可被

$[x - (1+3i)][x - (1-3i)] = x^2 - 2x + 10$ 整除

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & -3 & +6 & +2 & -60 & \\ & 2 & -2 & -12 & & 2 \\ & & -10 & +10 & +60 & -10 \\ \hline 1 & -1 & -6, & +0 & +0 & \end{array}$$

$\therefore\quad x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 2x - 60$

$= (x^2 - 2x + 10)(x^2 - x - 6) = (x^2 - 2x + 10)(x + 2)(x - 3)$

故方程式有二實根 -2，3

15. 設a，$b \in Z$，若$x^2 + 2ax + 3b = 0$ 有一根為 1，另一根介在 5，10 之間，則數對$(a，b) =$_

。

答案： $(-5，3)$

【詳解】

$\because$ $f(x)=x^2+2ax+3b=0$ 有一根爲 1 $\therefore$ $1+2a+3b=0$

而另一根介於 5，10 之間 $\therefore$ $f(5)f(10)<0$

$\therefore$ $(10a+3b+25)(20a+3b+100)<0$

而 $2a=-3b-1$ $\therefore$ $(-12b+20)(-27b+90)<0$

$\therefore$ $(b-\frac{5}{3})(b-\frac{10}{3})<0$，即 $\frac{5}{3}<b<\frac{10}{3}$

$\because$ $b\in Z$ $\therefore$ $b=2$ 或 $b=3$ $\Rightarrow$ $(a，b)=(-5，3)$ 或 $(-\frac{7}{2}，2)$

$\because$ $a\in Z$，故取 $(a，b)=(-5，3)$

16. 不等式 $(x+1)(x-1)(4-x)^3\geq 0$ 的解爲__________。

答案： $x\leq -1$ 或 $1\leq x\leq 4$

【詳解】

$(x+1)(x-1)(4-x)^3\geq 0$

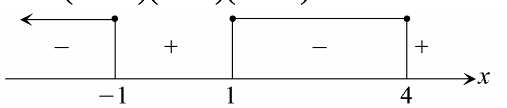
$\Leftrightarrow$ $(x+1)(x-1)[-(x-4)]^3\geq 0$

$\Leftrightarrow$ $-(x+1)(x-1)(x-4)^3\geq 0$

$\Leftrightarrow$ $(x+1)(x-1)(x-4)^3\leq 0$

$\because$ $(x-4)^2\geq 0$

$\therefore$ $(x+1)(x-1)(x-4)\leq 0$ $\Rightarrow$ $x\leq -1$ 或 $1\leq x\leq 4$



17. 設 $f(x)$ 爲二次函數且不等式 $f(x)>0$ 的解爲 $-2<x<4$，則 $f(2x)<0$ 的解爲__________。

答案： $x>2$ 或 $x<-1$

【詳解】

$-2<x<4$ $\Leftrightarrow$ $(x+2)(x-4)<0$

令 $f(x)=a(x+2)(x-4)$ 且 $a<0$

$\therefore$ $f(2x)=a\ (2x+2)(2x-4)<0$

$=4\ a\ (x+1)(x-2)<0$

$\Leftrightarrow$ $(x+1)(x-2)>0$ $\Leftrightarrow$ $x>2$ 或 $x<-1$

18. 設集合 $A=\{x\mid x^3-2x^2-11x+12>0\}$，$A\cup B=\{x\mid x>-3\}$，

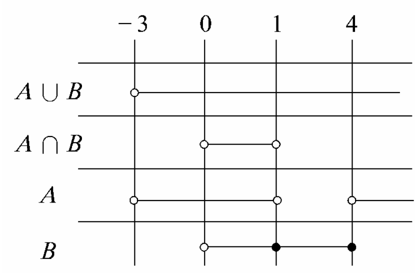
$A\cap B=\{x\mid 0<x<1\}$，則 $B=$__________。

答案： $\{x\mid 0<x\leq 4\}$

【詳解】

$\because$ $x^3-2x^2-11x+12=(x-1)(x+3)(x-4)$

$\therefore\ A=\{x \mid x>4$ 或 $-3<x<1\}$



利用聯集與交集的定義，知$B=\{x \mid 0<x\le 4\}$

19. 下列拋物線Γ_1：$y=\dfrac{1}{3}x^2+1$，Γ_2：$y=\dfrac{1}{2}x^2-2$，Γ_3：$y=-2x^2+1$，Γ_4：$y=-3x^2+x$開口最小的是__________，開口最大的是__________。

答案： Γ_4最小；Γ_1最大

【詳解】

$y=ax^2+bx+c$，$|a|$ 愈大，開口愈小

由於$\dfrac{1}{3}<\dfrac{1}{2}<|-2|<|-3|$，

故Γ_1的開口最大，Γ_4的開口最小