<table>
<tr><td colspan="6">高雄市明誠中學 高二數學平時測驗　　日期：92.06.20</td></tr>
<tr><td rowspan="2">範
圍</td><td rowspan="2">3-7 離差+Ans</td><td>班級</td><td></td><td rowspan="2">姓
名</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>座號</td><td></td></tr>
</table>

一. 單一選擇題 (每題 10 分)

1、(C) 一組數值資料爲 45，79，58，21，28，11，58，84，67，63，19，81，27，33，21，則其 Q_3= (A)63 (B)65 (C)67 (D)73 (E)79

解析：共十五筆資料由小而大爲 11，19，21，21，27，28，33，45，58，58，63，67，79，81，84

$\therefore\ Me = 45, Q_3 = 67$

2、(B) 一組數值資料爲 63，43，97，57，72，71，92，71，92，43，95，38，則其 Q_1= (A)43 (B)50 (C)57 (D)60 (E)92

解析：共十二筆資料由小而大爲 38、43、43、57、63、71、71、72、92、92、95、97

$\therefore\ Me = 71, Q_1 = 50$

3、(B) 某班有 49 名學生，某次數學考試之成績，經計算得算術平均爲 70 分，標準差爲 S 分。後來發現成績登錄有誤，某甲得 80 分卻誤記爲 50 分，某乙得 70 分卻誤記爲 100 分，更正後重算得標準差爲 S_1 分。試問 S_1 與 S 之間，有下列哪一種大小關係？（n 個數值 x_1，x_2，⋯，x_n）的標準差公式爲 $S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$ ，而 $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$

(A)$S_1 < S - 5$ (B)$S - 5 \le S_1 < S$ (C)$S_1 = S$ (D)$S < S_1 \le S + 5$ (E)$S + 5 < S_1$

解析：x_i 爲 49 名學生之正確成績

$\sum_{i=1}^{49}x_i = 49\times70 - 50 + 80 - 100 + 70 = 49\times70 \Rightarrow \overline{x} = 70$

$\sum_{i=1}^{49}x_i = 48S^2 + 49\times70^2 - 50^2 + 80^2 - 100^2 + 70^2 = 48S^2 + 49\times70^2 - 1200$

$\Rightarrow S_1^2 = \frac{1}{48}[48S^2 + 49\times70^2 - 1200] - \frac{49}{48}\times70^2 = S^2 - 25 < S^2 \Rightarrow S_1 < S$

又 $S^2 = S_1^2 + 25 \le S_1^2 + 10S_1 + 25 = (S_1 + 5)^2 \Rightarrow S \le S_1 + 5$ 即 $S - 5 \le S_1$

故知 $S - 5 \le S_1 < S$

4、(E) 甲、乙、丙三位同學參加推薦甄選學科能力測驗，五科的成績如下表所示。

	社會	國文	自然	英文	數學
甲	100	70	80	60	50
乙	90	60	74	50	40
丙	80	56	64	48	40

則 $S_{甲}$、$S_{乙}$、$S_{丙}$的大小關係爲： (A)$S_{甲} > S_{丙} > S_{乙}$ (B)$S_{丙} > S_{甲} = S_{乙}$ (C)$S_{甲} > S_{丙} = S_{乙}$ (D)$S_{乙} > S_{甲} = S_{丙}$ (E)$S_{甲} = S_{乙} > S_{丙}$

解析：甲生各科降 10 分後成乙生成績　$\therefore S_{甲} = S_{乙}$

丙生任二科間之差距均比乙生該二科之差距小（$S_{丙} = 0.8\,S_{乙}$）

5、(A) 下列 5 組資料（每組各有 5 筆）

甲：1，1，5，9，9，

乙：1，2，3，4，5，

丙：–2，–1，0，1，2，

丁：2，4，6，8，10，

戊：1，1，3，5，5，

試問那一組資料的標準差最大？ (A)甲 (B)乙 (C)丙 (D)丁 (E)戊

解析：$S_{乙}=S_{丙}$，$S_{丁}=2S_{乙}$，$S_{甲}>S_{戊}>S_{乙}$

$S_{甲}=\sqrt{\frac{1}{4}\times 4\times 16}=4$, $S_{丁}=\sqrt{\frac{1}{4}(4+4+16+16)}=\sqrt{10}$ $\therefore$ $S_{甲}$最大

二. 填充題 (每題 10 分)

1、有兩群資料$\{x_i\}$，$\{y_i\}$，滿足 $y_i = ax_i + b$，$i = 1,2, ... n$。若$\{x_i\}$之算術平均數爲$\bar{x} = 50$，$\{y_i\}$之算術平均數爲$\bar{y} = 81$，且$\{x_i\}$之標準差爲 $S_x = 6$，$\{yi\}$之標準差爲 $S_y = 9$ 則(a,b)=______或______。

答案：$\because\ \bar{y}=a\bar{x}+b$，$S_y=|a|S_x$

$\therefore\ 81 = 50a + b$

$9 = 6\ |a|\quad \therefore\ a=\frac{3}{2}, b=6$ 或 $a=-\frac{3}{2}, b=156$

$\therefore (a,b)=(\frac{3}{2},6)$ 或 $(-\frac{3}{2},156)$

2、擲一不公正骰子 50 次，將其結果紀錄如下表，則其點數的 Q_1=______，$Q.D.$=______。

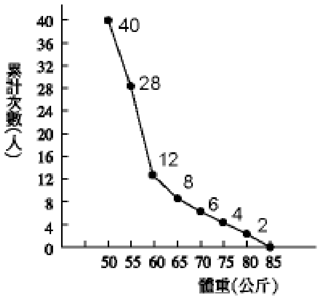
點數	1	2	3	4	5	6
次數	12	15	7	8	3	5

答案：2; 2

解析：Q_1 爲第 13 個數 $\therefore\ Q_1 = 2$

Q_3 爲第 38 個數 $\therefore\ Q_3 = 4$ $\therefore\ Q.D. = 2$

3、下圖爲高二 27 班體重累積次數分配曲線圖，則(1)Q_1 = ______，(2)$Q.D.$ = ______。



答案：(1)62.5 (2)$8\frac{1}{3}$

解析：$Q_1=65-5\times\frac{10-8}{12-8}=62.5$

$Q_3=55-5\times\frac{30-28}{40-28}=54\frac{1}{6}$

$Q.D.=62\frac{1}{2}-54\frac{1}{6}=8\frac{1}{3}$

4、從 12 筆數值資料計算得其算術平均數爲 63，標準差爲 25，隨後發現其中有 10，16 兩數不可靠，試求剩下 10 個數的算術平均數爲______，若標準差爲 S，則 S^2 = ______（以分數表示之）

答案：73; $\frac{857}{9}$

解析：$\bar{x}=\dfrac{12\times 63-10-16}{10}=73$ 將資料平移 73 分得 a_i 與-63，-57

$$25^2=\frac{1}{11}(\sum_{i=1}^{10}{a_i}^2+3969+3249)-\frac{12}{11}\times(-10)^2$$

$$\therefore \sum {a_i}^2=11\times 25^2+12\times 10^2-3969-3249=857$$

$\therefore$ 10 個數的標準差爲 $\sqrt{\dfrac{1}{9}\times 857-0}=\sqrt{\dfrac{857}{3}}\ \fallingdotseq\ 9.76,\ S^2=\dfrac{857}{9}$

5、n 筆資料 1，2，3，…，n 的算術平均數爲______（以 n 表示之），標準差爲______（以 n 表示之）。

答案：$\dfrac{1+2+\cdots+n}{n}=\dfrac{n+1}{2}$

$$S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}k^2-\frac{1}{n(n-1)}\times(\sum_{k=1}^{n}k^2)}$$

$$=\sqrt{\frac{n}{n-1}}\left(\sqrt{\frac{1}{n}\sum k^2-\frac{1}{n^2}(\sum k^2)}\right)$$

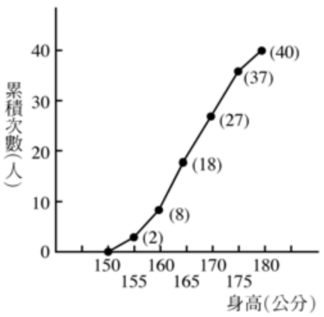
$$=\sqrt{\frac{n}{n-1}}\times\sqrt{\frac{(n+1)(n-1)}{12}}=\sqrt{\frac{n(n+1)}{12}}$$

6、有一群資料 x_1，x_2，…，x_{10}，其中已知$\sum_{i=1}^{10}x_i=660,\ \sum_{i=1}^{10}x_i^2=43704$，則其算術平均數爲______，標準差爲______。

答案：66; 4

解析：$\bar{x}=\dfrac{\sum x_1}{10}=66$，$S=\sqrt{\dfrac{1}{9}\times 43704-\dfrac{1}{9\times 10}\times(660)^2}=\sqrt{4856-4840}=4$

7、下圖爲高二 16 班身高累積次數分配曲線圖，(　)內數字表示累積次數，則(1)$Q_3=$______，(2)$Q.D.=$ ______。



答案：(1)171.5　　　　　　(2)10.5

解析：$Q_3=170+5\times\dfrac{30-27}{37-27}=171.5$

$$Q_1=160+5\times\frac{10-8}{18-8}=161$$

$\therefore\ Q.D.=171.5-161=10.5$

8、有 5 筆資料 3，7，6，5，x，若 5 筆資料的變異數爲 2.5 則 $x=$______，或______。

答案：4; $\dfrac{13}{2}$

解析：$2.5=\dfrac{1}{4}\times(119+x^2)\ =\ \dfrac{1}{4\times 5}\times(21+x)^2$

$50 = 5x^2 + 595 - x^2 - 42x - 441 \quad \therefore\ 4x^2 - 42x + 104 = 0$

$2x^2 - 21x + 52 = 0 \quad x = 4$ 或 $\dfrac{13}{2}$

9、某次測驗滿分 60 分，老師求出算術平均數為 27 分，標準差為 3 分，若老師將每位同學分數乘以 $\dfrac{5}{3}$ 倍，使滿分變為 100 分，則此時標準差為______分，校長看到分數仍然太低，要求老師給每位同學再加 10 分，則加分後標準差為______。

答案：(1) $3 \times \dfrac{5}{3} = 5$　(2) 5 因加分不改變標準差

10、老師調查班上 20 位同學的家庭人口數如下表，則家庭人口數的 Q_3=______，家庭人口數的 $Q.D.$=______。

家庭人口數	3	4	5	6	7
次數（人）	7	5	3	2	3

（人）

答案：5.5; 2.5

解析：共二十筆資料 $Q_1 = 3$，$Q_3 = 5.5$，$Q.D. = 2.5$

11、一菜販本週每天的收入分別為 3037，3196，2931，3143，3355，3249，3090 元，則其每天平均收入為______元，又標準差為______元。

答案：3143;　$53\sqrt{7}$

解析：收入全部減去 3000

$(37 + 196 + (-69) + 143 + 355 + 249 + 90) \div 7 = 143$

$\therefore$ 每日平均收入 3143 元，收入減去 3143 元得

-106，53，-212，0，212，106，53 再同除 53 可得-2，1，-4，0，4，2，1

其標準差為 $\sqrt{\dfrac{1}{6} \times 42} = \sqrt{7}$，故原資料之標準差為 $53\sqrt{7}$ 元（約 140.22 元）

12、有兩群資料 $\{x_i\}, \{y_i\}$ 滿足 $y_i = 100 - 2x_i,\ i = 1,2,\cdots,n$，若 $\{x_i\}$ 之算術平均數 $\bar{x} = 36$，標準差為 $S_x = 3$，則 $\{y_i\}$ 的算術平均數 $\bar{y} =$______，標準差 $S_y =$______。

答案：$\bar{y} = 100 - 2\bar{x} = 28$，$Sy = 2S_x = 6$

13、某班學生 50 人，數學競試成績的算術平均數為 76 分，標準差為 5 分。今將這班學生分成兩組，第一組有 40 人，平均成績為 77 分，標準差為 4。另一組學生有 10 人，則他們的算術平均數為______分，標準差為 S，則 S^2 =______（以分數表示之）

答案：72;　$\dfrac{401}{9}$

解析：另一組學生 10 人，算術平均數 a 分，標準差 b 分　$\therefore 10a + 40 \times 77 = 50 \times 76$

$\therefore\ a = 72$，將分數平移 76 分，不改變標準差

$$5 = \sqrt{\frac{1}{49}\left(\sum_{i=1}^{40} a_i^2 + \sum_{i=1}^{10} b_i^2\right) - \frac{1}{49 \times 50} \times 0^2} \quad \therefore \sum_{i=1}^{40} a_i^2 + \sum_{i=1}^{10} b_i^2 = 49 \times 25$$

$$4 = \sqrt{\frac{1}{39}\sum_{i=1}^{40} a_i^2 - \frac{1}{39 \times 40} \times 40^2},\ \sum_{i=1}^{40} a_i^2 = 39 \times 16 + 40$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{10} b_i^2 = 49 \times 25 - 39 \times 16 - 40 = 561$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{9} \times 561 - \frac{1}{9 \times 10} \times (-40)^2} = \frac{\sqrt{401}}{3} \fallingdotseq 6.67,\ S^2 = \frac{401}{9}$$

14、某次測驗中，老師取出 8 位同學，計算得他們的平均分數為 52 分，標準差為 $2\sqrt{2}$ 分，若

知此 8 個分數中的 6 個分數為 48，52，52，53，54，57 分，則其他 2 個分數為______分和______分。

答案：49; 51

解析：設另 2 個分數為 $52+a$，$52+b$

故 8 位同學之分數扣掉 52 分後可得 -4，0，0，1，2，5，a，b

$\therefore\ a+b+4=0$

$(2\sqrt{2})^2=\dfrac{1}{7}\ (16+1+4+25+a^2+b^2)$

$\begin{cases}a+b=-4\\ a^2+b^2=10\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\ b=-3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-3\\ b=-1\end{cases}$，故其他 2 個分數為 49 分和 51 分

三. 計算與證明題 (每題 10 分)

1、試求數值資料 36, 66, 56, 42, 45, 39, 15, 61, 78, 49, 75, 20, 25, 47, 56, 20, 33, 65, 43, 67, 75, 54, 52 的全距和四分位差。

答案：共有 23 筆資料 $\dfrac{23-1}{2}=11$

由小而大的前 11 筆資料為：

$$\underset{\substack{\uparrow\\ Q_1}}{15, 20, 20, 25, 33, 36, 39, 42, 43, 45, 47}$$

後 11 筆資料為：

$$53, 54, 56, 56, 61, \underset{\substack{\uparrow\\ Q_3}}{65}, 66, 67, 75, 75, 78$$

全距為 $78-15=63$。 四分位差 $Q.D.=65-36=29$。

2、試求數值資料 79, 65, 65, 41, 56, 45, 62, 43, 76, 58, 69, 57, 40, 78, 24, 85, 76, 95, 69, 37, 88, 44, 35, 72 的全距和四分位差。

答案：共有 24 筆資料。

由小而大的前 12 筆為：

$$24, 35, 37, 40, 41, \underbrace{43, 44}, 45, 56, 57, 58, 62$$

$$Q_1=\frac{43+44}{2}=43.5$$

後 12 筆為：

$$65, 65, 69, 69, 72, \underbrace{76, 76}, 78, 79, 85, 88, 95$$

$$Q_3=\frac{76+76}{2}=76$$

全距為 $95-24=71$。

四分位差為 $Q.D.=76-43.5=32.5$。

3、某班學生某次測驗成績統計如下：

分數	30~40	40~50	50~60	60~70	70~80	80~90	90~100
人數	2	3	11	20	32	25	7

試求其標準差。

組中點x_i	35	45	55	65	75	85	95
$x_i - 65$	–30	–20	–10	0	10	20	30
$d_i = \dfrac{x_i - 65}{10}$	–3	–2	–1	0	1	2	3
d_i^2	9	4	1	0	1	4	9
人數f_i	2	3	11	20	32	25	7
$f_i \cdot d_i$	–6	–6	–11	0	32	50	21
$f_i \cdot d_i^2$	18	12	11	0	32	100	63

答案：

標準差 $S = 10\sqrt{\dfrac{236}{99} - \dfrac{80^2}{100 \times 99}} \fallingdotseq 13.18$。

4、老師調查班上 40 位同學的家庭人口數如下表，試求(1)算術平均數爲何？(2)變異數爲何？

家庭人口數	3	4	5	6	7	8
次數（人）	8	15	11	3	1	2

答案：(1) $\dfrac{3\times 8 + 4\times 15 + 5\times 11 + 6\times 3 + 7\times 1 + 8\times 2}{40} = 4.5$

(2)先將資料全部平移 5，$S^2 = \dfrac{1}{39} \times (8\times(-2)^2 + 15\times(-1)^2 + 11\times 0^2 + 3\times 1^2 + 1\times 2^2 + 2\times 3^2) - \dfrac{40}{39}\times(\dfrac{1}{2})^2 = \dfrac{62}{39}$

5、下表爲高二 32 班 50 位同學國文成績次數分配表，試完成下表並且求出其算術平均數與標準差。

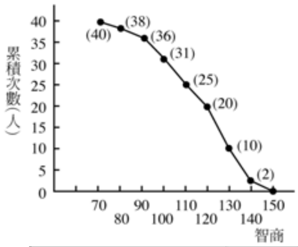
國文分數	次數（人）f_i	組中點 x_i	d_i	f_id_i	$f_id_i^2$
50～60	4				
60～70	11				
70～80	18				
80～90	10				
90～100	7				
總計					

國文分數	次數f_i	x_i	d_i	f_id_I	$f_id_i^2$
50～60	4	55	–2	–8	16
60～70	11	65	–1	–11	11
70～80	18	75	0	0	0
80～90	10	85	1	10	10
90～100	7	95	2	14	28
總計	150			5	65

答案：

$$\bar{x}=75+10\times\frac{5}{50}=76 \qquad S=10\times\sqrt{\frac{1}{49}\times 65-\frac{1}{49\times 50}\times 5^2}=\frac{5}{7}\sqrt{258}\fallingdotseq 11.47$$

6、下圖高二 8 班學生智商的累積次數分配曲線圖，(　)內數字表示累積次數，則 (1) 全距爲何？ (2) 算術平均數爲何？ (3) 變異數爲何？(以分數表示之)(可利用下表求之)



智商	f_i	x_i	d_i	f_id_i	$f_id_i^2$
70～80					
80～90					
90～100					
100～110					
110～120					
120～130					
130～140					
140～150					
總計					

答案：(1)150−70=80

(2)

智商	f_i	x_i	d_i	f_id_i	$f_id_i^2$
70～80	2	75	−4	−8	32
80～90	2	85	−3	−6	18
90～100	5	95	−2	−10	20
100～110	6	105	−1	−6	6
110～120	5	115	0	0	0
120～130	10	125	1	10	10
130～140	8	135	2	16	32
140～150	2	145	3	6	18
總計	40			2	136

$$\overline{X}=115+10\times\frac{2}{40}=115.5$$

$$S=10\sqrt{\frac{1}{39}\times 136-\frac{1}{39\times 40}\times(2)^2}=\sqrt{\frac{13590}{39}}=18.67 \qquad S^2=\frac{13590}{39}=\frac{4530}{13}\fallingdotseq 348.46$$

7、從 12 筆數值資料計算得其算術平均數爲 63，標準差爲 24。隨後發現其中有 10, 15 兩數不可靠。試求剩下 10 個數的算術平均數和標準差。

答案：設這 12 筆資料爲 $x_1, x_2, \cdots, x_{10}$, 10, 15

剩下 10 個數的算術平均數爲 $\overline{X}=\dfrac{63\times 12-(10+15)}{10}=73.1$

由原標準差爲 24，知 $\frac{1}{11}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{10}^2+10^2+15^2)-\frac{12}{11}\times 63^2=24^2$

而有 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{10}^2+325=11\times 24^2+12\times 63^2=53964$

各減 325，得 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{10}^2=53639$

故剩下 10 個數的標準差爲 $\sqrt{\frac{53639}{9}-\frac{10}{9}\times 73.1^2}\fallingdotseq 4.7$

8、甲班有學生 30 人，乙班有學生 20 人。某次測驗結果，平均成績甲班 70 分，乙班 60 分。標準差甲班 10 分，乙班 8 分。如果將這兩班合併計算，試求其算術平均數與標準差。

答案：設甲班學生的成績爲 $x_1, x_2, \cdots, x_{30}$， 乙班學生的成績爲 $y_1, y_2, \cdots, y_{20}$

兩班合併計算的平均爲

$$\overline{X}=\frac{(x_1+x_2+\ \cdots\ +x_{30})+(y_1+y_2+\ \cdots\ +y_{20})}{30+20}$$

$$=\frac{70\times 30+60\times 20}{50}=66 \text{（分）}$$

甲班的標準差爲 10 分，所以 $\frac{1}{29}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{30}^2)-\frac{30}{29}\times 72^2=10^2$

則 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{30}^2=30\times 70^2+29\times 10^2=149900$

同理 $y_1^2+y_2^2+\cdots+y_{20}^2=20\times 60^2+19\times 8^2=73216$

合併計算的標準差爲 $\sqrt{\frac{149900+73216}{49}-\frac{50}{49}\times 66^2}\fallingdotseq 10.4$（分）

9、設某 n_1 筆數值資料的算術平均數爲 $\overline{X}_1$，標準差爲 S_1；另外 n_2 筆數值資料的算術平均數爲 $\overline{X}_2$，標準差爲 S_2，試求這兩組資料合成的 n_1+n_2 筆資料的算術平均數和標準差。

答案：設第一組資料爲 $a_1,a_2,\cdots,a_{n1}$

第二組資料爲 $b_1,b_2,\cdots,b_{n1}$

這兩組資料合在一起的算術平均數爲

$$\overline{X}=\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+\cdots+b_n)}{n_1+n_2}=\frac{n_1\overline{X}_1+n_2\overline{X}_2}{n_1+n_2}$$

在第一組中，標準差爲 S_1，故

$$\frac{1}{n_1-1}(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)-\frac{n_1}{n_1-1}\overline{X}^2=S_1^2$$

得 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{n1}^2=n_1\overline{X_1}^2+(n_1-1)S_1{}^2$

同理 $b_1^2+b_2^2+\cdots+b_{n2}^2=n_2\overline{X_2}^2+(n_2-1)S_2{}^2$

故兩組合成後的標準差爲

$$S=\sqrt{\frac{1}{n_1+n_2-1}(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{n1}^2+b_1^2+b_2^2+\cdots+b_{n2}^2)-\frac{n_1+n_2}{n_1+n_2-1}\overline{X}^2}$$

$$=\sqrt{\frac{n_1\overline{X_1}^2+n_2\overline{X_2}^2+(n_1-1)S_1{}^2+(n_2-1)S_2{}^2}{n_1+n_2-1}-\frac{(n_1\overline{X_1}+n_2\overline{X_2})^2}{(n_1+n_2)(n_1+n_2-1)}}$$